गणित प्रयोगशाला

प्राथमिक

हस्त-पुस्तिका

गणित प्रयोगशाला

प्राथमिक

हस्त-पुस्तिका

संशोधन एवं विकास

ए. आर. राव, हेमा वसावड़ा, स्मृति बुच, नीलम मिश्रा, लता तोरवी

मार्गदर्शन

दिलीप सुरकर

हस्त-पुस्तिका लेखन

हेमा वसावड़ा, स्मृति बुच, नीलम मिश्रा

हिन्दी अनुवाद

दिव्यज्योति याज्ञिक

निर्माण-संयोजन

एम. जी. पंचाल

पैकेजिंग एवं प्रमोशन

मेघा सकलानी, दीपक श्रीमाली, मेघा परीख

हस्त-पुस्तिका (हिन्दी) डिज़ाइन एवं ले-आउट

दीपक महावर, रसिक पटेल

सहयोग

अनिल पटेल, राजेश शाह, झरणा डे, जालीम सोनार्थी, द्युति मोढा, नवघण परमार, भरत सोलंकी, अश्विन रावल

संदर्भ सूचि

- A Manual of Mathematical Models and Teaching Aids by Prof. A. R. Rao
- Mathematical Snapshots by Steinhaus
- Mathematical Models by Rolett and Cundy
- What is Mathematics? by Courant and Robbins

ISBN: 978-93-80580-18-0

नवरंगपुरा अहमदाबाद 380 009
दूरभाष : + 91-79-26302085, 26302914
ई-मेल : info@vascsc.org

www.vascsc.org

प्रस्तावना

गणित-शास्त्र प्रारंभ से ही गहन सिध्दांतों और तर्क पर आधारित विषय रहा है। इसमें कोई भी परिणाम सटीक प्रमाण के बिना स्वीकार्य नहीं है। अतः सामान्य विद्यार्थियों के लिए यह विषय कठिन तथा तेजस्वी विद्यार्थियों के लिए कई बार उबाऊ बन जाता है। विषय की जटिलता को कम करने हेतु विभिन्न प्रकार की ऐसी पद्धतियों के प्रति जागरूकता आई है, जो कि औपचारिक शिक्षण पद्धति की पूरक हों। उत्तरोत्तर लोकप्रिय हो रही "हैण्ड्स-ऑन मैथेमैटिक्स" (Hands-on Mathematics) एक ऐसी ही अनौपचारिक विधि है, जिसमें हम गणितीय सिद्धांतों व सूत्रों को सुगम बनाने हेतु सरल 'शैक्षणिक-साधनों' व सहज 'गतिविधियों' की सहायता लेते हैं। यद्यपि ये विधियाँ परिणामों का मात्र सत्यापन हैं प्रमाण नहीं तथापि ये विद्यार्थियों को गणितीय सिद्धांतों व संकल्पनाओं को सरलतापूर्वक समझने में सहायक हैं। आज अनेक शिक्षा मण्डलों नें अपने पाठ्यक्रमों में इन प्रयोग व गतिविधि आधारित सरल विधियों को भले ही अनिवार्य कर दिया हो, परन्तु गणित प्रयोगशाला की संकल्पना तो विक्रम ए. साराभाई कम्यूनिटी साइंस सेन्टर, अहमदाबाद (VASCSC)में 1970 के दशक में ही साकार हो चुकी थी जब वहाँ प्रो. ए. आर. राव नें अनेक शैक्षणिक-साधनों और गणितीय पहेलियों के रूप में, 250 से भी ज्यादा प्रारूपों के साथ 'गणित प्रयोगशाला' की स्थापना की।

प्राथमिक कक्षाओं के लिए उपयुक्त चुनिंदा प्रारूपों का यह 'मैथ लैब किट' शिक्षकों और विद्यालयों तक पहुंचने का प्रयास है ताकि इनका बृहत्तर उपयोग हो सके। इस किट में शामिल शैक्षणिक-साधनों का चुनाव कक्षा 1 से 7 तक के पाठ्यक्रमों के अनुरूप है तथा पहेलियों का स्तर विद्यार्थियों की तार्किक विचार-शक्ति व समझ के अनुरूप है। सभी प्रारूपों की विस्तृत जानकारी संलग्न हस्तपुस्तिका (manual) में दी गई है। इस 'किट' में दिए गए शैक्षणिक-साधन व पहेलियों को गणित-शास्त्र की विभिन्न शाखाओं के अनुसार वर्गीकृत किया गया है।

इन प्रारूपों में से बहुत से प्रारूपों का सृजन व विकास स्वंय प्रो. ए. आर. राव ने किया है। अन्य साधनों की जानकारी, गणितीय शैक्षणिक-साधनों से संबंधित मान्यता प्राप्त पुस्तकों में भी उपलब्ध हो सकती है।

आशा करते हैं कि प्रस्तुत "गणित प्रयोगशाला पैकेज" गणित के विद्यार्थियों अथवा जिज्ञासुओं के बीच गणित-शास्त्र को और अधिक रुचिकर बनानें में उपयोगी सिध्द हो कर हमारे श्रम को सार्थक करेगा। "हैण्ड्स-ऑन मैथेमैटिक्स" के क्षेत्र में हमारे अनुभवों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों तक ले जाना ही हमारा उद्देश्य है। यह 'प्राथमिक शाला के स्तर की किट' का प्रथम संस्करण है। आपके सुझावों तथा अनुभवों की हमें प्रतीक्षा रहती ही है, जिनका समावेश हम आने वाले संस्करणों में करने का प्रयास करेंगे।

दिलीप सुरकर
निदेशक
विक्रम ए. साराभाई कम्यूनिटी साइंस सेन्टर

अनुक्रमणिका

अंकगणित

1). पूर्णांक संख्याएँ 7-9
2). डिनीस ब्लॉक्स 10-12
3). सम विषम सख्याएँ 13
4). गुणनखण्ड 14
5). लघुत्तम समापवर्त्य (L. C. M.) 15
6). नेपियर की पट्टियाँ 16
7). भिन्न की पट्टियाँ 17-18
8). संख्याओं की फेर-बदल (Number Shift) 19
9). अंक-पहेली (1 से 8) 20
10). उलट-पुलट (Turn-Turn) 21

बीजगणित

11). $a(b+c) = ab+bc$ 22
12). $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ 23
13). $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 24
14). $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 25

क्षेत्रफल

15). त्रिभुज का क्षेत्रफल 26
16). समांतर चतर्भुज का क्षेत्रफल 27
17). समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 28
18). समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 29
19). पंचवर्ग (Pentominoes) 30

ज्यामिति

20). ज्यामितीय आकृतियाँ 31
21). त्रिभुजों का समुच्चय 32
22). त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 33
23). चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 34
24). आयताकार ज्यामितीय पटल 35
25). पायथागोरस प्रमेय 36
26). घनाकार 37
27). दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज 38
28). टैनग्राम 39
29). तीन-छिद्र एक ठेसी (Plug in three holes) 40
30). विशाल चतुष्फलक बनाईए 41
31). सोमा-घन 42

अन्य

32). पार्किंग पहेली 43
33). 4 x 4 रंगीन वर्गों की पहेली 44
34). पैग-बोर्ड पहेली 45
35). ब्रह्मा का स्तंभ 46

पहेलियों के हल 47

पूर्णांक संख्याएँ

1

यह शैक्षणिक-साधन पूर्णांक संख्याओं संबंधी मूलभूत संकल्पनाओं अर्थात् घनात्मक पूर्णांकों की तुलना, उनकी युग्मता तथा उन पर गणितीय संक्रियाओं को मूर्त्य रूप (concrete) में समझने हेतु उपयोगी है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- 30 ऐसी चौकोर गोटियाँ जिनकी एक बाजु लाल व दूसरी हरी है।

घनात्मक पूर्णांक संख्याओं (N) हेतु गतिविधियाँ :-

तुलना :- दो संख्याओं, उदाहरणार्थ 24 व 19 की तुलना हेतु क्रमशः 24 व 19 गोटियाँ लेकर दो स्तंभ बनायें। जिस स्तंभ की ऊँचाई ज्यादा है वह संख्या (यहाँ 24) बड़ी है।

घनात्मक संख्याओं पर मूलभूत गणितीय संक्रियाएँ

संक्रिया	गतिविधि	उदाहरण
1 योग (जोड़)	साथ में रखना	$3 + 4 \rightarrow$ क्रमशः 3 व 4 गोटियाँ लें $\rightarrow$ उन्हें साथ में रखें $\rightarrow$ गिने
2 व्यवकलन (घटाना)	पहली संख्या की गोटियों में से दूसरी संख्या के बराबर गोटियाँ अलग करना	$8 - 6 \rightarrow$ 8 गोटियाँ लें $\rightarrow$ 6 गोटियाँ अलग कर दे $\rightarrow$ गिनें
3 गुणन (गुणा)	गुण्य संख्या को गुणक संख्या के जितनी बार लेना	$4 \times 3 \rightarrow$ 4 गोटियों को 3 बार लें $\rightarrow$ उन्हें एक साथ रखें $\rightarrow$ गिनें
4 विभाजन (भाग)	विभाज्य संख्या को विभाजक संख्या अनुसार बराबर भागों में बाँटे	$12 \div 4 \rightarrow$ 12 गोटियाँ लें $\rightarrow$ 4 बराबर भागों में बाँटें

अवलोकन :-

1). वस्तुतः संख्याओं का पुनरावर्तित योग ही गुणनफल है, इस संकल्पना की स्पष्टता यहाँ होती है।

2). योग व गुणन संक्रियाओं हेतु क्रम विनिमेय तथा साहचर्य गुणधर्म सरलता से समझाए जा सकते हैं।

3). विभाजन संक्रिया में यदि विभाज्य संख्या के बराबर भाग न किए जा सकें तब शेष राशि की संकल्पना को समझाया जा सकता है।

पूर्ण संख्याएँ व गणितीय संक्रियाएँ :-

सूचना :- 1). यहाँ हम घनात्मक व ऋणात्मक पूर्णांकों को क्रमशः हरी व लाल गोटी द्वारा निर्दिष्ट करेंगे।

2). $1+(-1) = 0$ इस अवधारणा के फलस्वरूप, प्रस्तुत गतिविधि में एक हरी गोटी व एक लाल गोटी का अर्थ होगा एक भी गोटी नहीं।

3). ऋणात्मक संख्याओं को कोष्टक में उदाहरणार्थ (-8) तथा व्यवकलन को 11-8, इस तरह दर्शाएँगे।

4). अंकगणितीय संक्रियाओं का प्रस्तुत गतिविधियों में अर्थ चाहे संख्याएँ ऋणात्मक हों या घनात्मक उपरोक्त तालिका के अनुसार ही करेंगे।

5). यदि दोनो संख्याएँ धनात्मक हों या दोनो ही ऋणात्मक हों तब भी गोटियों की वाँछित बाजु हरी अथवा लाल लेकर गतिविधियाँ की जायेंगी।

6). विभाजन (अथवा गुणन) हेतु यदि भाजक (अथवा गुणक) एक घनात्मक संख्या है, तो उपरोक्त गतिविधियाँ दर्शायी जायेंगी।

गतिविधियाँ :-

1). योग (जोड़)

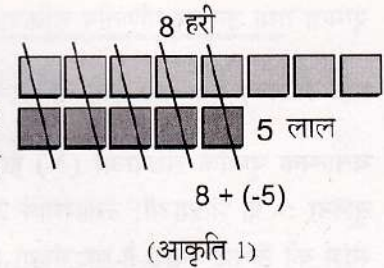
8 हरी

5 लाल

8 + (-5)

(आकृति 1)

जब एक संख्या ऋणात्मक व दूसरी घनात्मक पूर्णांक हो; उदाहरणार्थ 8+(-5) तब 8 हरी व 5 लाल गोटियाँ लें → उन्हें साथ में रखें → 1 लाल अ 1 हरी = 0 (कोई गोटी नहीं) इसलिए 5 लाल + 5 हरी = 0 अतः उन्हें अलग करें → शेष गोटियाँ गिनें → यहाँ 3 हरी गोटियाँ शेष हैं → +3

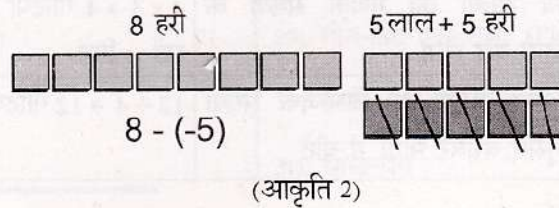
अर्थात् 8+(-5) = 3

अवलोकन :- उपरोक्त गतिविधि द्वारा पूर्णांकों हेतु क्रमविनिमेय तथा साहचर्य गुणधर्मों का सत्यापन संभव है।

2). व्यवकलन (घटाना)

जब एक घनात्मक संख्या में से एक ऋणात्मक संख्या घटानी हो; उदाहरणार्थ, 8-(-5)

8 हरी गोटियाँ लें → इनमें से 5 लाल गोटियाँ अलग करनी हैं → 5 लाल + 5 हरी गोटियाँ 8 हरी गोटियाँ के साथ रखें (क्यों ?) → अब 5 लाल गोटियाँ अलग कर दें → शेष गोटियाँ गिनें → 13 हरी गोटियाँ = +13

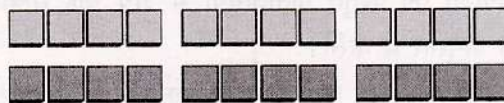
अतः 8-(-5) = 13 = 8+5

(आकृति 2)

3). गुणन (गुणा)

गुणक यदि एक ऋणात्मक संख्या है तब उतनी बार गोटियाँ लेना संभव नहीं है। अतः हमारी गतिविधि में इस प्रक्रिया का अर्थघटन निम्नानुसार करेंगे यदि गुणक ऋणात्मक है तो गुण्य संख्या के बराबर गोटियों को गुणक संख्या के जितनी बार लें (चिन्ह की उपेक्षा करें) → इस तरह प्राप्त सभी गोटियों को (ऋणात्मक चिन्ह के कारण) पलट दें।

उदाहरणार्थ : 4 x (-3)

4 हरी गोटियाँ 3 बार लें (चिन्ह की उपेक्षा करें) → इस तरह प्राप्त 12 गोटियाँ को (ऋणात्मक चिन्ह के कारण) पलट दें → 12 लाल गोटियाँ = -12

अतः 4 x (-3) = -12

(आकृति 3)

अवलोकन :-

1). (-4) x (-3), यहाँ 4 लाल गोटियाँ लेकर उपरोक्त अनुसार गतिविधि करें।

2). 4 x (-3) = -12 = (-4) x 3

3). (-4) x (-3) = 12 = 4 x 3

उपरोक्त सर्वसमिकाओं के साथ ही साथ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य गुणधर्मों का सत्यापन भी उपरोक्त गतिविधि द्वारा संभव है।

4). विभाजन (भाग)

यदि विभाजक संख्या ऋणात्मक हो तब

सर्व प्रथम विभाज्य संख्या जितनी गोटियाँ लें → इन्हें विभाजक संख्या (चिन्ह की उपेक्षा करें) जितने भागों में बाँटें → प्राप्त गोटियों को (ऋणात्मक चिन्ह के कारण) पलट दें।

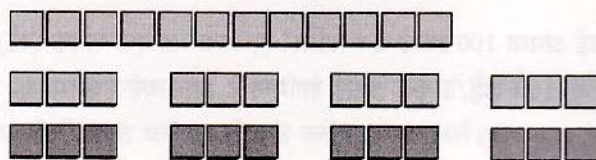
उदाहणार्थ : 12 ÷ (-4)

12 हरी गोटियाँ लें → 4 बराबर भागों में बाँटें (चिन्ह की उपेक्षा करें) → प्राप्त गोटियों को (ऋण चिन्ह के कारण) पलट दें → प्रत्येक भाग में 3 लाल गोटियाँ हैं = (-3)

अवलोकन :-

1). (-12) ÷ (-4), यहाँ 12 लाल गोटियाँ लेकर उपरोक्त अनुसार गतिविधि करें

2). 12 ÷ (-4) = (-3) = (-12) ÷ 4

3). (-12) ÷ (-4) = 12 ÷ 4, इन सर्वसमिकाओं का सत्यापन भी उपरोक्त गतिविधि द्वारा संभव है।

(आकृति 4)

2 डिनीस ब्लॉक्स

यह प्रारूप एक शैक्षणिक-साधन है। इसके द्वारा स्थानीयमान (place value) तथा हासिल (carry over and borrowing) की संकल्पना को बहुत सरलता से समझाया जा सकता हैं।

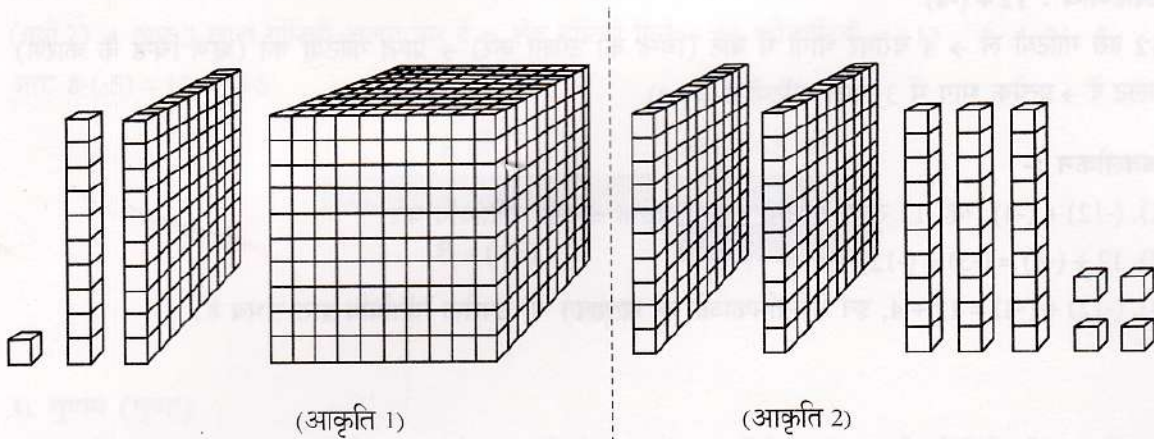
हंगेरी के प्रख्यात गणितज्ञ डॉ. जॉलटन पॉल डिनीस को डिनीस ब्लॉक्स का प्रणेता माना जाता हैं।

यहाँ उपलब्ध हैं :- 20 छोटे घन (cubes) 15 छड़ें (rods) 11 तख्तियाँ (plates) तथा 1 बड़ा धन (cube)

सूचना :-

1). एक छोटा घन, इकाई स्थान को दर्शाता है अतः इसे इकाई घन कहा जाता है। आकृति (1)

2). एक छड़ (rod), एक दहाई (दशक) को दर्शाती है। जिसमें 10 इकाई घन शामिल हैं।

(आकृति 1) (आकृति 2)

3). एक चौकोर तख्ती में दस छड़ें अथवा 100 इकाई घन शामिल हैं, अतः वह एक शतक (सौ) को दर्शाती है। आकृति (1)

4). एक बड़े घन में 10 तख्तियाँ/100 छड़ें/1000 इकाई शामिल हैं अतः यह एक सहस्त्र (हजार) को दर्शाता है।

गतिविधियाँ :-

1). संख्यायों का निरूपण

उदाहरणार्थ संख्या 234 का निरूपण करने के लिए प्रदत्त ब्लॉक्स को निम्नानुसार रखें।

आकृति (2) तथा $234 = (2 \times 100) + (3 \times 10) + (4 \times 1)$

2). योग (जोड़ना)

(i) सर्वप्रथम जिन दो संख्याओं का योग करना है, उनको उपरोक्त चित्रानुसार निरूपित करें।

(ii) उन्हें एक साथ रखें।

(iii) एक आकार के ब्लॉक्स को एक समूह में रखें।

(iv) प्रस्तुत समूहों का एक एक करके परिक्षण कीजिए, यदि एक समूह में ब्लॉक्स की संख्या 10 से ज्यादा हो जाए, तो एक दस के समूह को उच्चतर श्रेणी के एक ब्लॉक से बदलें (Exchange) इस तरह हासिल (Carry over)की प्रकिया बहुत सरलता से समझाई जा सकती है।

3). व्यवकलन (घटाना):- दी हुई संख्याओं में से बड़ी संख्या का डिनीस ब्लॉक्स द्वारा निरूपण करें। इसमें वे दूसरी संख्या के बराबर ब्लॉक्स अलग कर दें। जिस भी समूह में अपेक्षित संख्या से कम ब्लॉक्स हों तो उसके उच्च/श्रेणी स्तर से एक ब्लॉक निकाल लें व उस समूह के 10 ब्लॉक्स के साथ उसको बदल लें इस तरह हासिल लेने (borrowing) की प्रक्रिया को बहुत सरलता से समझाया जा सकता है।

उदाहरणार्थ : 234 - 56

(i) संख्या 234 का निरूपण ब्लॉक्स द्वारा करें। स्पष्टत: 234 में शतक के दो, दहाई के तीन व इकाई के चार ब्लॉक्स होंगे। इनमें से 56 घटाना है, इकाई के 6 व दहाई के 5 अलग करने हैं अतः उच्च श्रेणीयों में से क्रमशः एक एक ब्लॉक को बदलना होगा, जैसे दहाई 3 ब्लॉक्स में से एक के बदले इकाई के 10 ब्लॉक्स ले लेने हैं, जिससे कुल ब्लॉक्स 14 ; (4+10) हो जायेंगे तथा शतक की एक तख्ती को बदले 10 छड़ें लेने पर कुल छड़ें हो जाएेंगीं 12 ; (2+10) अब सरलता से इनमें से 6 इकाई व 5 दहाई ब्लॉक्स अलग किऐ जा सकते है इस विनियम (प्रक्रिया) के उपरांत, 1 चौकोर तख्ती (शतक) 7 छड़ें (दहाई) व 8 इकाई घन (एकम) शेष रहेगें, अर्थात 234 - 56 = 178

4). गुणन (गुणा)

वस्तुतः गुणन पुनरावर्तित योग ही है, अतः गुणन संख्या के बराबर ब्लॉक्स को गुणक संख्या जितनी बार (Number of times) लेकर दो संख्याओं का गुणन समझाया जा सकता है।

उदाहरणार्थ : $17 \times 3 = ?$

17 का निरूपण करें तथा ही उतने ब्लॉक्स को 3 बार लें। इस प्रक्रिया में यदि किसी एक श्रेणी के ब्लॉक्स 10 से ज्यादा हो जायें तो उन्हे एक श्रेणी उच्च ब्लॉक्स में एक ब्लॉक से बदललें।

(यहाँ $7 \times 3 = 21$, अतः 20 इकाई घन (एकम) को दो छड़ों (दशक) से बदलेंगे।)

अवलोकन :-

यहाँ देखा जा सकता है कि दो संख्याओं का गुणनफल, निरूपित ब्लॉक्स द्वारा बनी आकृति के क्षेत्रफल के बराबर है। साथ ही साथ यह गतिविधि निम्नलिखित नियमों गुणधर्मों का भी सत्यापन करती है :-

1). $17 \times 3 = (10+7) \times 3 = (10 \times 3) + (7 \times 3)$ (वितरण गुण)

2). $17 \times 3 = 3 \times 17$ (क्रमविनिमेय गुण)

5). विभाजन

वस्तुतः विभाजन, पुनरार्तित व्यवकलन (घटाना) ही है अतः विभाजन की प्रक्रिया समझने हेतु सर्वप्रथम विभाज्य संख्या को निरूपित करे। उदाहरणार्थ 214 ÷ 2

यहाँ 214 = (2 x 100) + (1 x 10) + (4 x 1)

अर्थात् दो चौकोर तख्तियाँ (शतक), 1 छड़ (दहाई) व 4 घन (इकाई) लें अब दो तख्तियों को हम दो भागों में विभाजित कर सकते हैं परन्तु एक छड़ को विभाजित नहीं किया जा सकता है।

अतः एक छड़ को दस घन से बदलें। यहाँ कुल इकाई घन 14 ; (4+10) हो जाते हैं (यहाँ हासिल लेना/दहाई लेना (borrowing) समझाया जा सकता है), जिन्हें दो भागों में बांटा जा सकता है।

इस तरह 214 ÷ 2 = 1 चौकोर तख्ती +7 इकाई घन = 107

अवलोकन :-

(i) स्पष्टतः विभाजन को पुनरावर्तित व्यकलन कहा जा सकता है।

(ii) साथ ही साथ यह भी समझाया जा सकता है कि विभाजन बाईं ओर से ही क्यों शुरू होता है जबकि शेष सभी संक्रियाएँ दाईं ओर से शुरू होती हैं। (प्रस्तुत उदाहरण में शतक को पहले विभाजित किया गया है, इकाई को अंत में)

6). मूलभूत बीजगणितीय संक्रियाएँ

एक चर राशि वाले बीजीय व्यंजकों पर संक्रियाएँ समझाने हेतु भी डिनीस ब्लॉक्स का प्रयोग किया जा सकता है। इसके लिए इन ब्लॉक्स का अर्थघटन निम्नानुसार करते हैं ;

(i) एक छोटा घन ; एक अचर राशि को दर्शाता है।

(ii) एक छड़ ; एक चर राशि को दर्शाती है।

अतः यदि x एक चर राशि है तो $3x$ का अर्थ होगा 3 छड़ें।

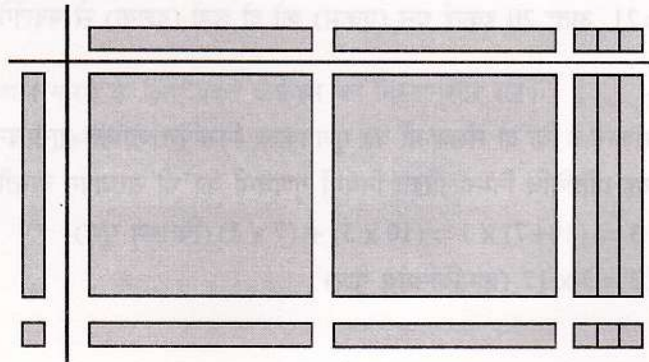
(iii) एक तख्ती, एक चर राशि के वर्ग को दर्शाती है। अतः $3x^2$ का अर्थ होगा 3 तख्तियाँ।

यहाँ हम सिर्फ घनात्मक गुणाकों वाले वर्ग व्यंजक लेंगे। उदाहरणार्थ $(x+1)(2x+3)$ का विस्तरण दिखाने हेतु क्रमशः $(x+1)$ व $(2x+3)$ दर्शाने वाले ब्लॉक्स आकृति (3) के अनुसार रखें। तथा उनके विस्तार के अनुसार संपूर्ण क्षेत्र को योग्य ब्लॉक्स से भरें। इस तरह हमें प्राप्त होता है ;

$(x+1)(2x+3) = 2x^2 + 5x + 3$

(आकृति 2)

सम - विषम संख्याएँ

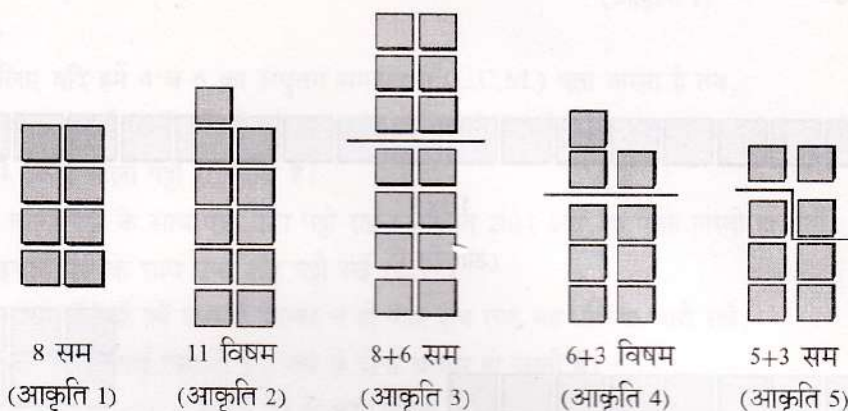
3

यह शैक्षणिक-साधन, सम-विषम संख्याओं की संकल्पना तथा उन पर मूलभूत संक्रियाओं को सरलता पूर्वक समझाने में सहयोगी है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- 30 चौकोर गोटियाँ (Square counters)

गतिविधियाँ :-

1). सम-विषम संख्याएँ

दी हुई संख्या सम है या विषम यह निश्चत करने हेतु संख्या के मूल्य जितनी गोटियाँ लें, दो-दो गोटियों को निम्नांकित आकृति के अनुसार आजु-बाजु में रख कर आयताकार आकृति बनाने का प्रयत्न करें। जिस संख्या से आयताकार आकृति बनती है वह संख्या सम है (आकृति 1) अन्यथा विषम (आकृति 2)

8 सम (आकृति 1) | 11 विषम (आकृति 2) | 8+6 सम (आकृति 3) | 6+3 विषम (आकृति 4) | 5+3 सम (आकृति 5)

2). योग (जोड़ना)

(i). सम + सम = ?, उदाहरणार्थ 8 + 6 (आकृति 3) क्रमशः 8 व 6 गोटियाँ लें उपरोक्त आकृति के अनुसार रखें → दो आयताकार आकृति प्राप्त होती हैं → उन्हें साथ में रखें (योग) → कौनसा आकार प्राप्त होता है? → इसका तात्पर्य क्या है?

(ii). सम + विषम = ? उदाहरणार्थ 6 + 3 (आकृति 4), अथवा विषम + विषम = ? उदाहरणार्थ 5 + 3 (आकृति 5) दिखाने हेतु भी उपरोक्त आकृति अनुसार रखे किस तरह की आकृति मिलती है? → इसका तात्पर्य क्या है?

विवेचना :-

1). इसी तरह की गतिविधियों द्वारा क्या व्यवकलन (घटाना), विभाजन व गुणन संक्रियाओं को समझाया जा सकता है?

2). सम - सम = ?, विषम - विषम = ?, सम - विषम = ? व विषम - सम = ?

3). सम x सम = ?, विषम x विषम = ?, सम x विषम = ?

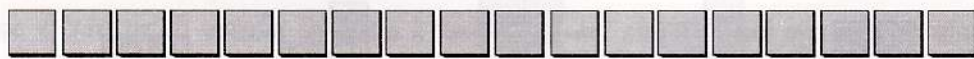
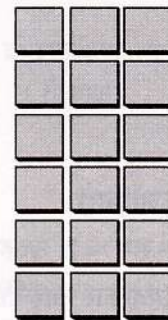
4). विभाजन संक्रिया हेतु आपका क्या मंतव्य है? आशय स्पष्ट करें।

4 गुणनखण्ड

इस शैक्षणिक साधन की सहायता से किसी संख्या के गुणनखण्ड (Factor) को तथा रूढ़ संख्याओं की संकल्पना को भली-भाँति समझाया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- 30 चौकोर गोटियाँ (Square counters)

सूचना :- अग्रलिखित गतिविधि हेतु गोटियों की एक ही बाजु का उपयोग करें।

गतिविधि :- दी गई संख्या के गुणनखण्ड निकालने के लिए, उस संख्या के बराबर ही गोटियाँ लीजिए। इनके द्वारा जितने संभव हों उतने प्रकार की आयताकार आकृतियाँ बनाईए। निम्नांकित उदाहरण में संख्या 18 है, अतः 18 गोटियाँ लेने पर 18 x 1, 9 x 2 व 6 x 3 ऐसी तीन आकृतियाँ प्राप्त होंगी।
इस तरह 18 के गुणनखण्ड होंगे 1, 2, 3, 6, 9, 18.

(आकृति 1) (आकृति 2) (आकृति 3)

विवेचना :-

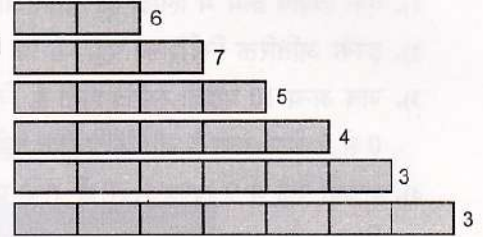
1). रूढ़ संख्याओं (prime numbers) को इस प्रकार सरलता से समझाया जा सकता है।

2). वर्ग संख्याओं का परिचय इस गतिविधि द्वारा दिया जा सकता है।

लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M)

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा लघुत्तम समापवर्त्य की संकल्पना को सरलता पूर्वक समझाया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

समान चौड़ाई परन्तु अलग-अलग लम्बाई वाली 28 पट्टियाँ (Strips)
सभी पट्टियों (Strips) पर इकाई दूरी पर खाँचे (grooves) बनाए गए हैं।
यहाँ पर 2, 3, 4, 5, 6, 7 इकाईयों की क्रमशः 6, 7, 5, 3, 3 पट्टियाँ हैं।

(आकृति 1)

गतिविधि :-

उदाहरण के लिए यदि हमें 4 व 6 का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) पता करना है तब,

1). 4 इकाई व 6 इकाई वाली पट्टियों को (आकृति 2c)आमने सामने रखें। स्पष्टतः 6 इकाई वाली पट्टी की लम्बाई 4 इकाई वाली पट्टी से ज्यादा है।

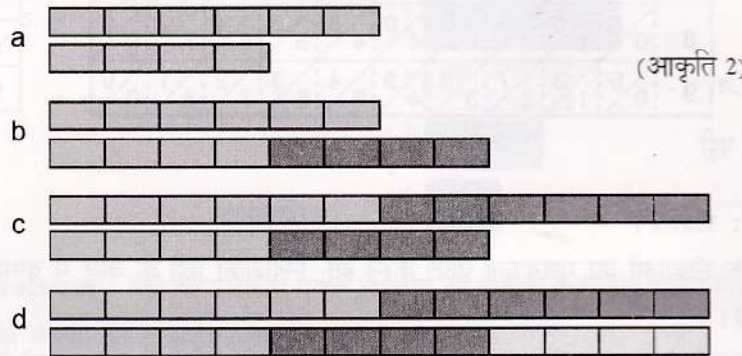
2). 4 इकाई वाली पट्टी के साथ एक और पट्टी रखें (आकृति 2b)। अब यह पंक्ति लम्बी हो गयी।

3). अतः 6 इकाई पट्टी के साथ एक और पट्टी रखें (2c)।

4). जब तक दोनों पंक्तियों की लम्बाई बराबर न हो जाए तब तक यह प्रक्रिया जारी रखें।

5). दोनों पंक्तियों की लम्बाई कितनी है? जब वे दोनों बराबर हो जाती हैं।

6). 4 इकाई की कितनी तथा 6 इकाई की कितनी पट्टियाँ हैं?

7). यह लम्बाई (यहाँ 12)ही दोनों अंकों (4 व 6) का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) है। कैसे?

(आकृति 2)

टिप्पणी :-

1). एक बार समान लम्बाई मिल जाने के बाद भी यदि ये प्रक्रिया जारी रखी जाए तो दूसरी बार, तीसरी बार तथा उसके बाद भी समान लम्बाई, समान अन्तराल पर प्राप्त होती है। क्या यह प्रक्रिया लघुत्तम समापवर्त्य की संकल्पना स्पष्ट करती है?

2). इस गतिविधि के द्वारा 4, 5 अथवा 7, 3 (परस्पर रूढ़ संख्याएँ) का साथ ही साथ 4, 8 (जहाँ एक अंक दूसरे का गुणनखण्ड है) लघुत्तम समापवर्त्य प्राप्त कीजिए, दोनों का अवलोकन कीजिए।

3). यहाँ देख सकते हैं कि H.C.F x L.C.M = दोनों संख्याओं का गुणनफल।

6 नेपियर की पट्टियाँ

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा शीघ्र-गुणन किया जा सकता है। ऐसा माना जाता है कि इनकी खोज नेपियर ने की थी अतः इन्हें नेपियर की पट्टियाँ कहा जाता है।

यहाँ एक ट्रे में उपलब्ध हैं :-

1). एक विशेष क्रम में लिखी हुई संख्याओं वाली 10 पट्टियाँ

2). इनके अतिरिक्त निर्देशिका पट्टी जो कि ट्रे में ही जुड़ी हुई है, उसपर 1 से 9 तक संख्याएँ अंकित हैं।

3). जब अन्य 10 पट्टियाँ स्वतंत्र होती हैं, जिन्हें आवश्यकता अनुसार ट्रे में रखा जा सकता है। इनका अनुक्रम क्रमशः 0 से 9 दिया गया है जो कि प्रत्येक पट्टी के शीर्ष पर अंकित है।

4). प्रत्येक पट्टी में 9 खण्ड (cell)हैं, तथा प्रत्येक खण्ड को एक तिर्यक रेखा द्वारा दो भागों में विभाजित किया गया है जिनमें एक ऊपर व दूसरी नीचे संख्याएँ लिखी गई है। उदाहरणार्थ $\frac{3}{6}$ का अर्थ है 63.

(आकृति 1) (आकृति 2)

उदाहरण : 3987 x 7

1). उपरोक्त संख्याओं का गुणनफल प्राप्त करने हेतु, निर्देशिका पट्टी के बाजु में क्रमशः 3, 9, 8, 7 अंको की पट्टियों को रखें।

2). प्रत्येक पट्टी के उन खण्डों (cells) को जो निर्देशिका पट्टी के खण्ड 7 के सामने है उनकी गणना उपरोक्त आकृति के अनुसार करें।

इस प्रकार किन्हीं दो संख्याओं का, जिनमें गुणक एक अंक का हो, गुणनफल प्राप्त किया जा सकता है।

टिप्पणी :-

1). सभी 10 पट्टियों पर संख्याएँ किस क्रम में अंकित है? अवलोकन कीजिए।

2). यदि गुणक दो अंको वाला हो तो किस प्रकार इन पट्टियों द्वारा गुणनफल प्राप्त होगा?

भिन्न की पट्टियाँ

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन जिसके द्वारा भिन्न संख्याओं की संकल्पना व उन पर मूलभूत संक्रियाओं को सरलता पूर्वक समझाया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक आयताकार ट्रे

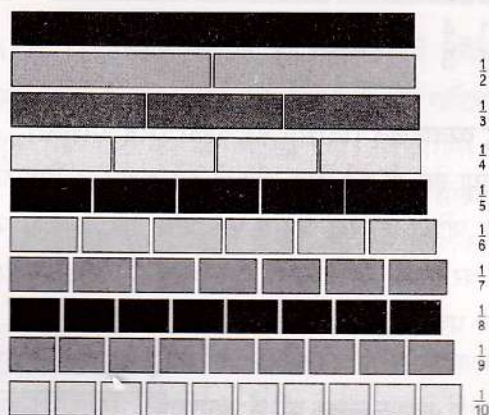
2). एक इकाई (unit) लम्बाई की पट्टी

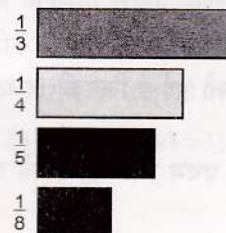
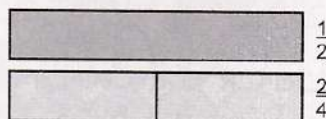
3). दो $\frac{1}{2}$ इकाई लम्बाई की पट्टियाँ

4). से 11). $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{10}$ इकाई लम्बाई की क्रमशः 3, 4, 5, ... 10 पट्टियाँ

गतिविधियाँ :-

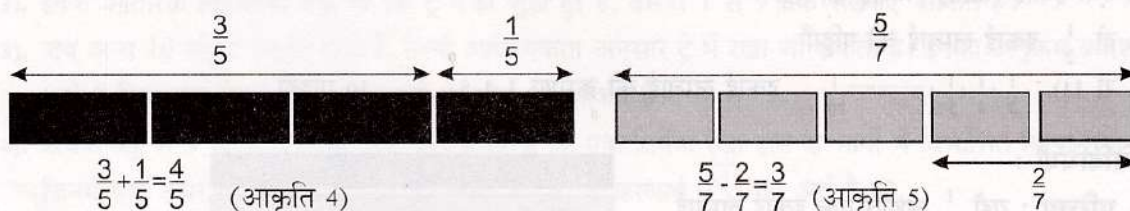
1). **परिचय :** यहाँ $\frac{1}{2}$ अर्थात एक इकाई लम्बाई के दो बराबर भाग (आकृति 1)

(आकृति 1)

2). **तुलना :** जिन दो भागों की तुलना करनी है, उन्हें निम्न आकृति के अनुसार रखें। छोटी या बड़ी भिन्न स्पष्टतः पट्टियों की लम्बाई से देखी जा सकती है। दो से ज्यादा भिन्नों की तुलना भी इस विधि के द्वारा की जा सकती है। जैसे : $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ में $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ (आकृति 2)

(आकृति 2)

3). **तुल्य भिन्न (Equivalent fraction) :** यहाँ यह सरलता पूर्वक दिखाया जा सकता है अलग-अलग दिखने वाली भिन्न राशियाँ किस तरह बराबर हो सकती हैं। $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (आकृति 3)

(आकृति 3)

4). योग और व्यवकलन (समान हर वाली भिन्न राशियाँ) : योग संक्रिया हेतु, दी गई भिन्न राशियों को दर्शाने वाली पट्टियाँ साथ में रखें (निम्न आकृति अनुसार) और व्यवकलन (घटाना) हेतु प्रथम संख्या के बराबर भिन्न पट्टियों में से दूसरी भिन्न राशि के बराबर की पट्टियों को अलग करें।

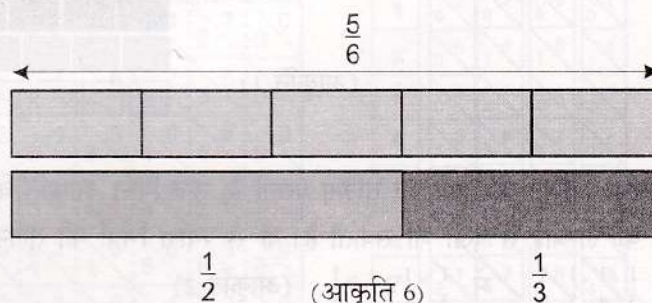
उदाहरणार्थ : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ (आकृति 4) और $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$ (आकृति 5)

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ (आकृति 4) $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$ (आकृति 5)

5). योग और व्यवकलन (विभिन्न हर वाली भिन्न राशियाँ)

(i). योग संक्रिया हेतु दी गई भिन्न राशियों को दर्शाने व भिन्न पट्टियों को आजु-बाजु रख कर एक लम्बी पट्टी बनायें, फिर विभिन्न पट्टियों को रख कर ये पता करने की कोशिश करें कि किस भिन्न की पट्टियों द्वारा उपरोक्त लम्बाई की पट्टी के बराबर लम्बी पट्टी बनायी जा सकती हैं (Trial & Error Method)। इस तरह की समान पट्टियों का योग, परिणाम को प्रदर्शित करता है।

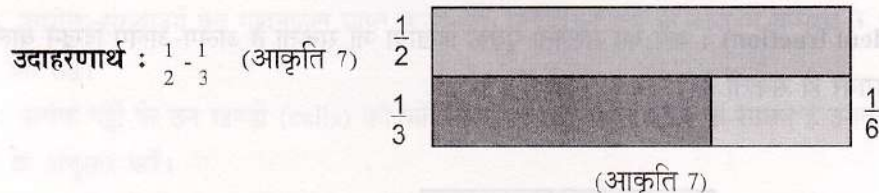
उदाहरणार्थ : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (आकृति 6)

$\frac{5}{6}$

$\frac{1}{2}$ (आकृति 6) $\frac{1}{3}$

यहाँ, $\frac{1}{6}$ की 5 पट्टियाँ ली गई हैं जिनकी लम्बाई $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ की दो पट्टीयों के बराबर होती है अतः $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

(ii). व्यवकलन हेतु : प्रथम भिन्न राशि की पट्टी के उपर द्वितीय पट्टी को रखें, बचे हुऐ स्थान को कौनसी पट्टी भर सकती है पता करें।

उदाहरणार्थ : $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (आकृति 7)

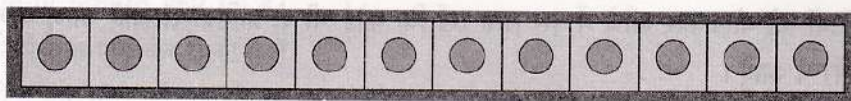
(आकृति 7)

भिन्न $\frac{1}{2}$ की एक पट्टी पर $\frac{1}{3}$ की एक पट्टी रखने पर जो रिक्त स्थान बचता है वह $\frac{1}{6}$ की पट्टी से पूर्णतः भरता है अतः $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

संख्याओं की फेर-बदल (Number Shift)

यह गणितीय खेल, प्राकृतिक संख्या पर योग संक्रिया की सामान्य जानकारी पर आधारित है।

यहाँ उपलब्ध है :-

1). 12 चौकोर गोटियाँ जिनमें क्रमशः 1 से 11 तक संख्याएँ अंकित हैं तथा 12 वीं गोटी रिक्त (खाली) होती है।

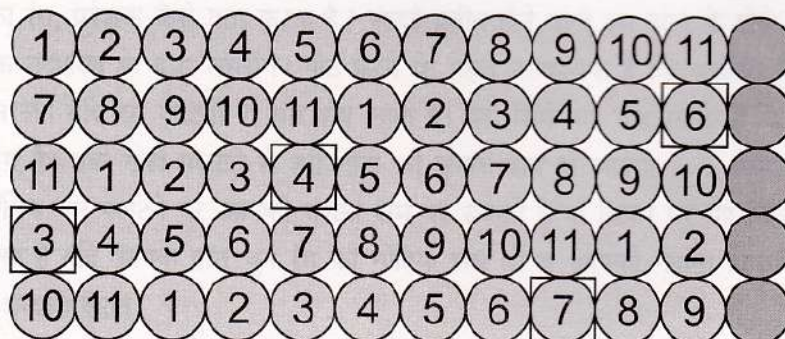
2). एक लम्बी ट्रे जिसमें सभी 12 गोटियाँ एक अनुक्रम में रखी जा सकें।

(आकृति 1)

खेल :- खेल की शुरूवात में बाईं से दाईं ओर 1 से 11 अंकित गोटियों को अनुक्रम में तथा अंत में रिक्त गोटी को रखें। प्रदर्शक की अनुपस्थिति में कोई एक व्यक्ति एक संख्या चुनेगा और उतनी ही बार गोटियों को एक एक करके बाईं ओर से दाईं ओर स्थान्तरित करेगा और पुनः रिक्त गोटी को अंत में रख देगा। तद्उपरान्त प्रदर्शक आकर एक गोटी उठाता है, और मजेदार बात तो यह है कि उस गोटी पर अंकित संख्या ही चुनी हुई संख्या होती है। इस स्थान्तरित व्यवस्था में रखी गोटियों पर भी बार बार यह प्रक्रिया दुहराई जाती है और हर बार प्रदर्शक सही (वाँछित) गोटी ही उठाता है। यह कैसे संभव है?

खेल का रहस्य :- पहली बार का स्थानान्तरण समझना आसान है क्योंकि रिक्त गोटी के बाजु वाली गोटी पर ही अपेक्षित संख्या अंकित होती। किन्तु दूसरी बार में एक होशियारी आवश्यक है कि प्रथम संख्या दिखाते समय देख ली जाए।

उदाहरणार्थ यदि प्रथम संख्या 6 है तथा दूसरी बार 4 है, तब कुल स्थानान्तरण 10 गोटियों का हुआ पर 6 गोटियाँ पहली बार में ही स्थान्तरित हो चुकी है अतः 6 वीं गोटी के बाद वाली गोटी ही अपेक्षित संख्या वाली गोटी होगी, 6 + 1 = 7 वीं गोटी। यही गणना हर बार होगी अर्थात् अगली सभी संख्याओं के योग से एक ज्यादा वाली संख्या की जगह पर ही अपेक्षित संख्या होगी। जब योग 11 से ज्यादा हो जाए तब योग में से 11 घटाने के बाद जो संख्या आए उससे अगली (+1) संख्या वाली जगह पर अपेक्षित संख्या होगी। (6+ 4+ 3 = 13, 13- 11= 2, 2+1=3) अर्थात् तीसरी संख्या।

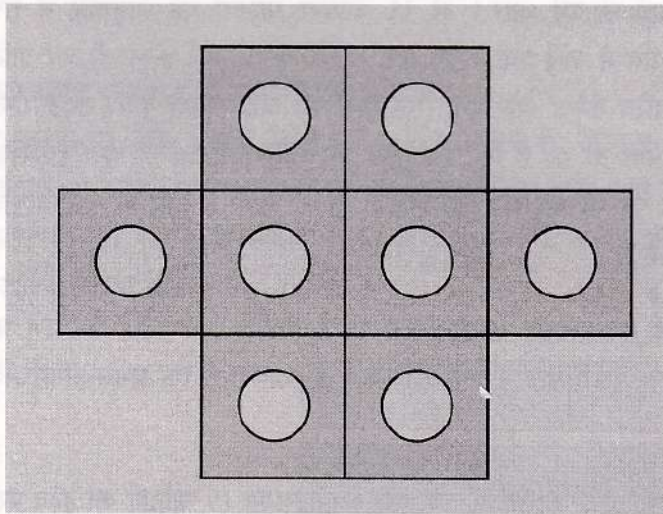
(आकृति 2)

अंक पहेली (1 से 8)

एक विद्यार्थी जिसे प्राकृत संख्याओं का सामान्य ज्ञान है वह भी इस पहेली का आंनद ले सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक आयताकार बोर्ड, जिसमें निम्न आकृति अनुसार आठ गोलाकर खाँचे (grooves) बने हैं।

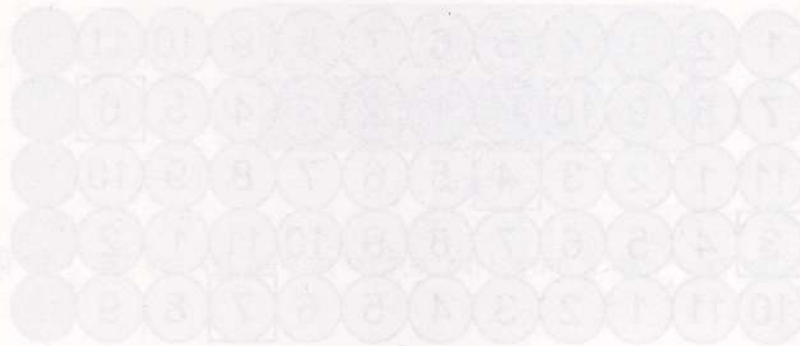
2). आठ गोल गोटियाँ जिन पर क्रमशः 1 से 8 संख्या अंकित हैं।

पहेली :- प्रस्तुत 8 गोटियों को गोलाकार खाँचे में इस तरह रखें कि कोई भी दो क्रमिक-संख्याएँ आजु-बाजु (सीधी, आड़ी या विकर्ण रेखा में) न आएँ।

(आकृति)

सूचना :-

1). किस खाँचे के आजु-बाजु (पड़ौस) में सबसे ज्यादा पड़ौसी खाँचे हैं?

2). उनमें कौनसे अंक आएँगे?

उलट-पुलट (Turn-Turn)

यह एक रसप्रद खेल है। यहाँ से 18 ऐसी गोटियों (Counters) का उपयोग किया गया है जिसकी एक बाजु लाल व दूसरी हरे रंग की है।

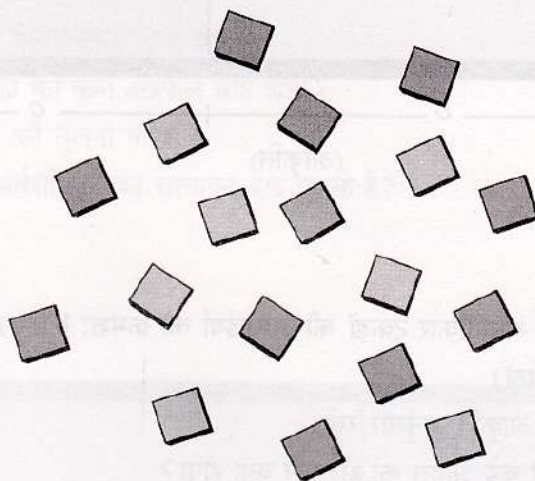
खेल :- सर्वप्रथम सभी गोटियों को टेबल (मेज) पर इस तरह डालें की कुछ गोटियों कि हरी बाजु ऊपर हो तो कुछ की लाल। फिर दर्शकों में से एक व्यक्ति को बुलाइए, जो कि गोटियों को पलटेगा। गोटियों को पलटने के लिए कुछ विशेष नियम निर्धारित किए गए हैं।

1). गोटियाँ एक-एक कर पलटनी है।

2). प्रत्येक बार गोटी को पलटते हुए, कहना है पलटा (turned)।

3). कितनी ही गोटियों को तथा कितनी ही बार पलटा जा सकता है।

4). एक ही गोटी को बार-बार भी पलटा जा सकता है, बस हर बार पलटते समय कहना है पलटा (turned)।

5). पलटने की प्रक्रिया पूरी होने पर कहना है विराम (Stop) और किसी भी एक गोटी को हथेली से ढँक (छिपा) लेना है।

(आकृति)

इस प्रक्रिया के दौरान प्रर्दशक (जिसने गोटियाँ टेबल पर डालीं थीं) पीठ फेर खड़ा रहता है, विराम (Stop) सुनते ही पलटेगा और गोटियों को देखते ही बतादेगा कि छिपी हुई गोटी किस रंग की है।

खेल के पीछे का गणित :-

छिपी गोटियों का रंग, प्रर्दशक कैसे पता करता है? जादुई प्रतीत होने वाले इस खेल के पीछे गणितशास्त्र का कमाल है। इसे हम एक उदाहरण के द्वारा समझेंगे। पीठ फेरने के पहले आवश्यक है कि प्रदर्शक किसी एक रंग की कुल गोटियों को गिन ले। यदि हरी गोटियाँ 7 और शेष लाल हैं। यहाँ सिर्फ यह याद रखना है कि हरी गोटियों की संख्या सम है या विषम है। एक गोटी पलटते ही हरी गोटी की संख्या सम हो जाऐगी ...... फिर विषम ...... सम ...... विषम ...... अंतिम बार पलटने पर आपकी गणना सम पर रूकती है या विषम पर यह निश्चित करता है कि छिपी गोटी का रंग क्या है यदि आपके द्वारा चुने रंग की गोटियाँ सम थी व आपकी गणना विषम पर रूकती है तो छिपी गोटी हरी होगी अन्यथा लाल।

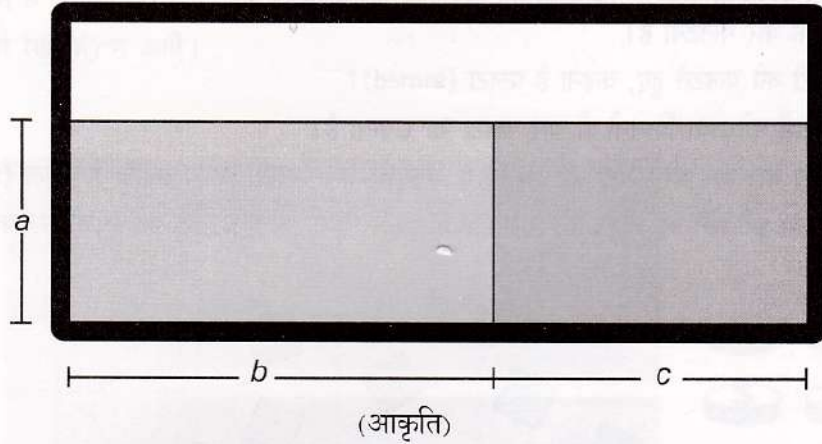
अर्थात् सिर्फ सम विषम संख्या की मूलभूत संकल्पना को ध्यान में रख कर इस रहस्यात्मक लगने वाले खेल को समझा जा सकता है।

11 $a(b+c) = ab+ac$

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक आयताकार ट्रे,
2). दो आयताकार टुकड़े, जिनकी एक भुजा समान है।

(आकृति)

अब,

1). ट्रे की आधार भुजा पर आए आयताकार टुकड़ों की लम्बाईयों को क्रमशः b व c द्वारा तथा लम्बवत भुजा को a द्वारा निर्दिष्ट करें। (आकृति देखें)
2). इन टुकड़ों को ट्रे में उपरोक्त आकृति अनुसार रखें।
3). दोनो टुकड़ों से मिल कर बने बड़े आयत का क्षेत्रफल क्या होगा?
4). दोनों आयतों का क्षेत्रफल कितना होगा?
5). चरण 3 व 4 के परिणामों की तुलना कीजिए।

क्या आप इस तरह, उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन देख पा रहे हैं?

विवेचना :- इस सर्वसमिका को वितरण नियम (distributive law) भी कहते हैं।

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक आयताकार ट्रे

2). चार आयताकार टुकड़े

सूचना :-

1). चारों आयताकार टुकड़ों को प्रस्तुत ट्रे में इस तरह रखें कि एक बड़ी आयताकार आकृति बने।

2). वस्तुतः इस बड़े आयत का विच्छेदन करके ही यह चार छोटे आयताकार टुकड़े बनाए गए हैं।

अब,

1). प्रस्तुत ट्रे में स्थापित चार आयताकार टुकड़ों की आधार भुजा पर लम्बाई को क्रमशः c व d द्वारा तथा लम्बवत भुजा पर लम्बाई को क्रमशः a व b द्वारा निर्दिष्ट करें।

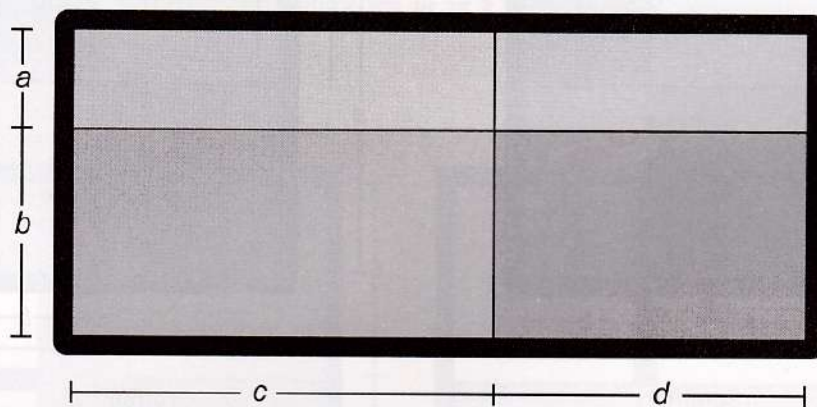
2). इस तरह प्राप्त बड़े आयत का क्षेत्रफल क्या होगा?

3). चारों छोटे आयताकार टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल क्या होगा?

4). चरण 2 व 3 के परिणामों की तुलना करें।

क्या आप इस तरह, उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन देख पा रहे हैं?

(आकृति)

13 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक वर्गाकार ट्रे

2). दो वर्गाकार टुकड़े

3). दो आयताकार टुकड़े

सूचना :-

1). प्रस्तुत चारों टुकड़ों को ट्रे में इस तरह रखें कि एक बड़ी वर्गाकार आकृति बने।

2). वस्तुतः यह चारों टुकड़े इस बड़े वर्ग का विच्छेदन करके ही बनाए गए हैं।

अब,

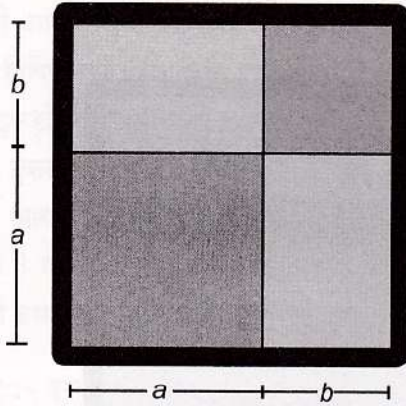
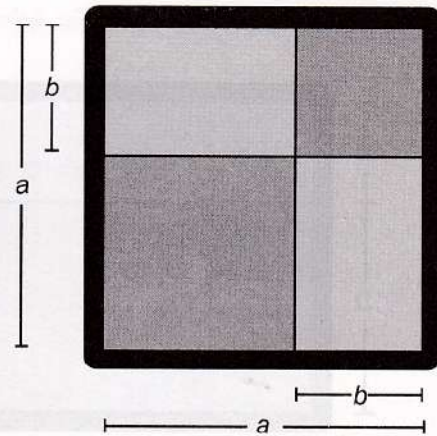
1). दिए गए वर्गाकार टुकड़ों में से एक की लम्बाई a व दूसरे की b द्वारा निर्दिष्ट करें। (आकृति 1)

2). चारों आकृतियों को ट्रे में इस तरह से रखें कि एक बड़ी वर्गाकार आकृति बने।

3). बड़े वर्ग की एक भुजा की लम्बाई क्या होगी?

4). चारों टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल क्या होगा?

5). चरण 3 व 4 के परिणामों की तुलना कीजिए।

क्या आप इस तरह, उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन देख पा रहे हैं?

(आकृति 1) (आकृति 2)

विवेचना :- प्रस्तुत प्रारूप द्वारा ही $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का भी सत्यापन किया जा सकता है।

$a^2 - b^2 = (a+b)(a - b)$

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक आयताकार ट्रे

2). एक वर्गाकार टुकड़ा

3). दो सर्वांगसम समलम्ब-चतुर्भुजाकार टुकड़े

सूचना :-

1). प्रस्तुत तीनों टुकड़ों को ट्रे में इस तरह रखें कि एक बड़ी वर्गाकार आकृति बने।

2). वस्तुतः ये तीनो टुकड़े इस बड़े वर्ग का विच्छेदन करके ही बनाए गए हैं।

अब,

1). ट्रे के अन्दर बने वर्ग की भुजा की लम्बाई को a द्वारा तथा वर्गाकार टुकड़े की लम्बाई को b द्वारा निर्दिष्ट करें। (आकृति 1)

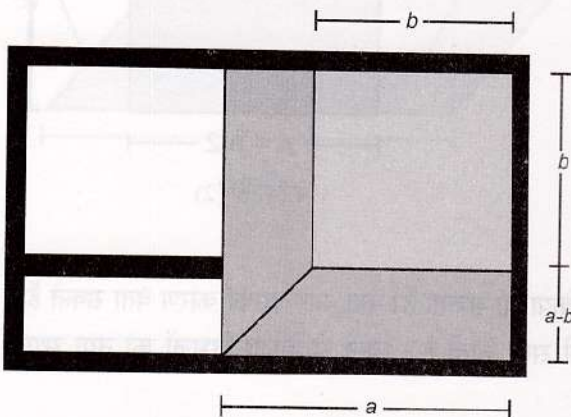
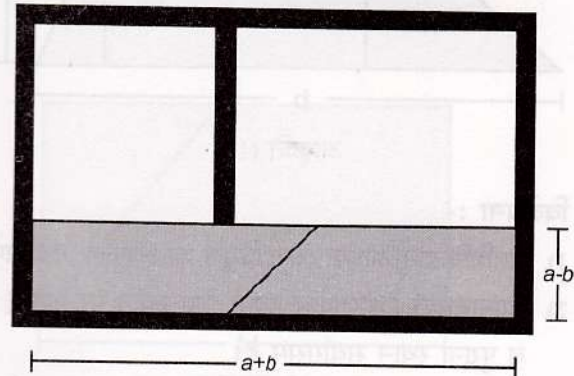
2). समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं की लम्बाई व इनके बीच की दूरी क्या होगी?

3). प्रस्तुत तीनों टुकड़ों को ट्रे में वर्गाकार आकृति बनाते हुऐ स्थापित कीजिए। इस बड़े वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

4). अब वर्गाकार आकृति को अलग कीजिए; शेष आकृति का क्षेत्रफल क्या होगा?

5). शेष दोनों सर्वांगसम समलम्ब-चतुर्भुजाकार टुकड़ों को इस तरह पुनः स्थापित (re-arrange) करें कि एक आयताकार आकृति बने। प्रस्तुत आयत का क्षेत्रफल क्या होगा?

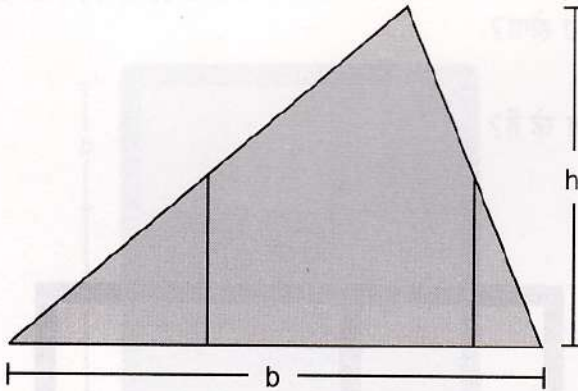
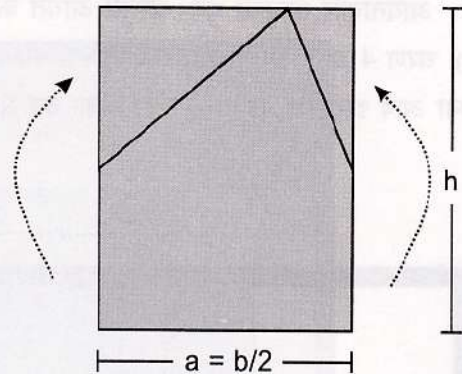
6). चरण 4 व 5 के परिणामों की तुलना कीजिए।

क्या आप इस तरह, उपरोक्त सर्वसमिका का सत्यापन देख पा रहे हैं?

आकृति (1) आकृति (2)

15 त्रिभुज का क्षेत्रफल

यह प्रारूप एक शैक्षणिक-साधन है, जिसके द्वारा यह सत्यापित किया जा सकता है कि,
एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1/2 आधार भुजा x ऊँचाई

यहाँ उपलब्ध हैं :- 1). दो समकोण-त्रिभुजाकार टुकड़े, 2). एक पंचभुजाकार टुकड़ा

सूचना :- 1). प्रस्तुत तीनों टुकड़े मिलकर एक बड़ा त्रिभुजाकार आकृति बनाते हैं।
2). वस्तुतः यह तीनों टुकड़े इसी बड़े त्रिभुज का विच्छेदन करके ही बनाए गए हैं।

अब, 1). प्रस्तुत टुकड़ों को इस तरह रखिए कि एक बड़ी त्रिभुजाकार आकृति बने।
2). त्रिभुज की आधार भुजा व ऊँचाई को क्रमशः b व h द्वारा निर्दिष्ट करें। आकृति (1)
3). पुनः इन तीनों टुकड़ों को इस तरह रखें कि एक आयताकार आकृति बने।
4). इस आयत की चौड़ाई को a द्वारा निर्दिष्ट करें। आयत की लम्बाई क्या होगी? आकृति (2)
5). अतः इस आयत का क्षेत्रफल क्या होगा?
6). इस त्रिभुज के क्षेत्रफल व आयत के क्षेत्रफल में क्या संबंध है?
7). लम्बाई a व b में क्या सबंध है?
8). चरण 6 व 7 के परिणामों की तुलना करें।
9). क्या हमें त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र प्राप्त होता है?
अतः इस तरह, त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र सत्यापित होता है।

आकृति (1)

आकृति (2)

विवेचना :-

1). इस विधि द्वारा अधिक कोण त्रिभुज का क्षेत्रफल, नहीं प्राप्त किया जा सकता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

2). स्थानान्तरित त्रिभुजाकार टुकड़े, नए स्थान पर पूर्णतः कैसे समा जाती है? ध्यान से देखिए त्रिभुजों का नया स्थान व पुराना स्थान सर्वांगसम है।

3). समान आधार वाले दो त्रिभुज लें। उन्हें उपरोक्त विधि द्वारा विच्छेदित करें। फिर उन्हें इस तरह पुनः स्थापित करें कि दो सर्वांगसम आयत प्राप्त हो। इस तरह यह सत्यापित होता है कि समान आधार भुजा व ऊँचाई वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

यह प्रारूप एक शैक्षणिक-साधन है, जिसके द्वारा यह सत्यापित किया जा सकता है कि,
समांतर चतुर्भज का क्षेत्रफल = आधार भुजा x ऊँचाई

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक समलम्ब-चतुर्भुजाकार टुकड़ा

2). एक समकोण-त्रिभुजाकार टुकड़ा

अब,

1). दिए गए दोनों टुकड़ों को इस तरह रखें कि एक समांतर चतुर्भुज बने। (आकृति 1)

2). चतुर्भुज की आधार भुजा व ऊँचाई को क्रमशः b व h द्वारा निर्दिष्ट करें।

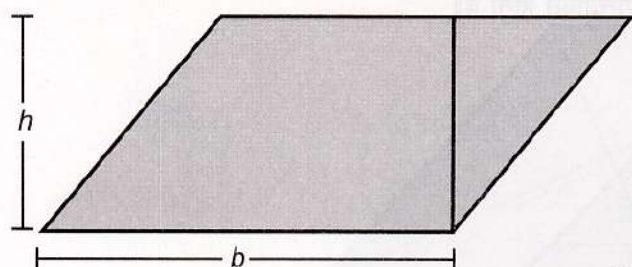
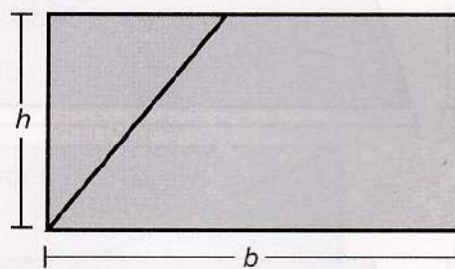
3). समकोण त्रिभुज को इस तरह पुनः स्थापित करें कि एक आयताकार आकृति बने। (आकृति 2)

4). इस आयत की लम्बाई व ऊँचाई क्या होगी? अतः क्षेत्रफल क्या होगा?

5). इस समांतर चतुर्भज व आयत के क्षेत्रफल में क्या संबंध है?

6). चरण 4 व 5 के परिणामों की तुलना करें।

अतः इस तरह समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र सत्यापित होता है।

आकृति (1)

आकृति (2)

17 समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

यह प्रारूप, एक शैक्षणिक-साधन है, जिसकी सहायता से यह सत्यापित किया जा सकता है कि समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 1/2 ऊँचाई x (a+b) ; यहाँ a, b समांतर भुजाओं की लम्बाई है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). दो समलंब-चतुर्भुजाकार टुकड़े

सूचना :-

1). दिए गए दोनों समलंब-चतुर्भुजाकार टुकड़े, एक बड़ा समलंब चतुर्भुज बनाते हैं।

2). वस्तुतः बड़े समलंब चतुर्भुज की दोनों असमांतर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर से विच्छेदन करके ही ये दोनो छोटे समलंब-चतुर्भुजाकार टुकड़े बनाए गए हैं।

अब,

1). दिए गए दोनों समलंब चतुर्भुजों को इस तरह रखें कि एक बड़ा समलंब चतुर्भुज बने।

2). समांतर भुजाओं को क्रमशः a व b द्वारा तथा ऊँचाई को h द्वारा निर्दिष्ट करें। (आकृति 1)

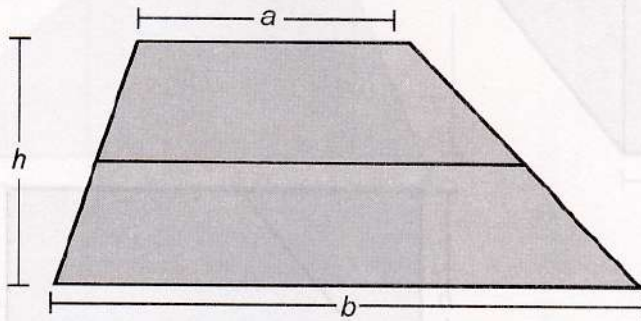
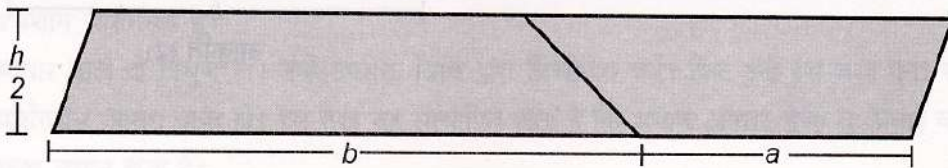
3). प्रस्तुत समलंब चतुर्भुज को इस तरह पुनः स्थापित करें कि एक समांतर चतुर्भुज बने। (आकृति 2)

4). इस समांतर बाहु चतुर्भुज की ऊँचाई कितनी है? आधार भुजाओं की लम्बाई कितनी है? अतः इसका क्षेत्रफल कितना होगा?

5). समलंब चतुर्भुज व समांतर बाहु चतुर्भुज के क्षेत्रफल में क्या सबंध है?

6). चरण 4 व 5 के परिणामों की तुलना करें।

7). क्या हमें समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र प्राप्त होता है?

अतः इस तरह, समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र सत्यापित होता है।

(आकृति 1)

(आकृति 2)

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

यह प्रारूप, एक शैक्षणिक-साधन है, जिसकी सहायता से यह सत्यापित किया जा सकता है कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 1/2\,(d_1 \times d_2)$; यहाँ d_1, d_2 समचतुर्भुज के विकर्ण हैं।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). चार सर्वांगसम समकोण-त्रिभुजाकार टुकड़े

सूचना :-

1). चारों समकोण त्रिभुजाकार टुकड़े एक समचतुर्भुज बनाते हैं।

2). वस्तुतः एक समचतुर्भुज का विकर्णों पर से विच्छेदन करके ही ये चार समचतुर्भुजाकार टुकड़े बनाए गए हैं।

अब,

1). दिए गए चारों समकोण त्रिभुजाकार टुकड़ों को इस तरह रखें कि एक समचतुर्भुज प्राप्त हो।

2). इस तरह प्राप्त समचतुर्भुज के विकर्णों को क्रमशः d_1 व d_2 द्वारा निर्दिष्ट करें। (आकृति 1)

3). अब चारों समकोण त्रिकोणों को इस तरह पुनःस्थापित करें कि आयताकार आकृति प्राप्त हो। (आकृति 2)

4). प्रस्तुत आयत की लम्बाई क्या है? इसकी चौड़ाई क्या है? अतः इसका क्षेत्रफल क्या है?

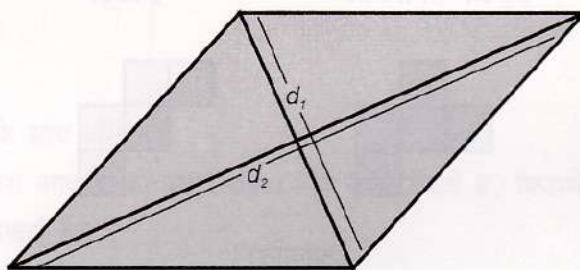
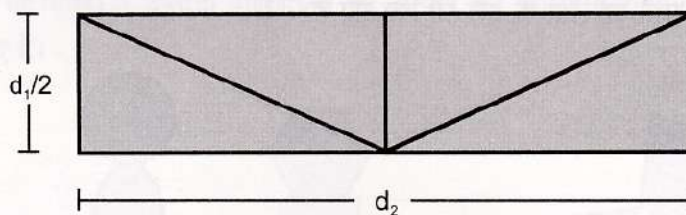
5). इस समचतुर्भुज व आयत के क्षेत्रफल में क्या संबध है?

6). क्या हमें समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र प्राप्त होता है?

अतः इस तरह, समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र सत्यापित होता है।

आकृति (1)

आकृति (2)

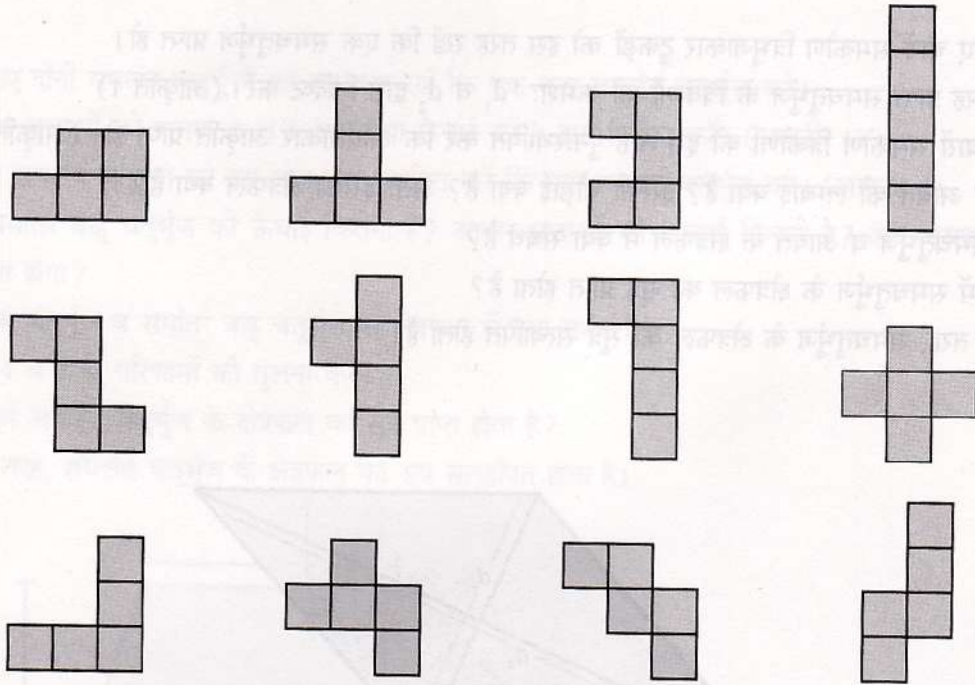
पंचवर्ग (Pentominoes)

यह एक अत्यन्त रूचिकर ज्यामितीय पहेली है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

12 पंचवर्ग

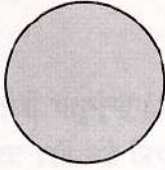
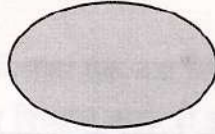
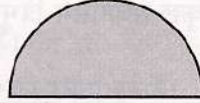
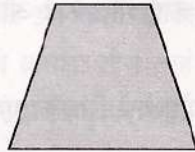
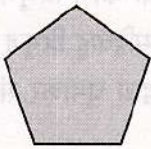
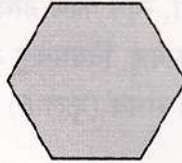
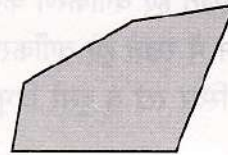
(पंचवर्ग, 5 वर्गों की एक विविधता पूर्ण व्यवस्था है। इस तरह मात्र 12 आकृतियाँ ही संभव हैं।)

पहेली :- सभी 12 पंचवर्गों को एक साथ लेकर दी गई आकृतियाँ बनाईए। (संलग्न प्रपत्र में आकृतियाँ दी गयी है।)

शर्त :- सभी पंचवर्गों को इस तरह रखना है कि न तो वे एक दुसरे को ढकें और न ही उनके बीच रिक्त स्थान हो।
(No over lapping & no gap)

(आकृति)

हल :- सलंग्न प्रपत्र में सभी पहेलियों के हल भी दिए गए हैं।

समतल-ज्यामिति (Plane geometry) की मूलभूत आकृतियों का परिचय देने हेतु यह शैक्षणिक-साधन बहुत महत्वपूर्ण योगदान देता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- 10 द्विआयामी आकृतियाँ

(आकृति 1)

गतिविधियाँ :-

1). प्रत्येक आकृति का नाम के साथ परिचय।

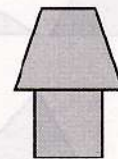
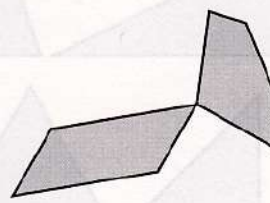
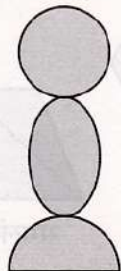
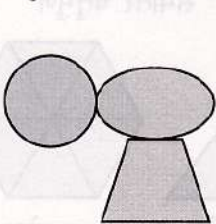
2). अवलोकन कीजिए कि किस आकृति की धार (edge) मात्र सरल रेखाएँ है? किसमें सरल रेखा व वक्र रेखा दोनों है? व किसमें मात्र वक्र रेखाएँ हैं?

3). प्रत्येक आकृति के शीर्ष बिन्दुओं व भुजाओं की संख्या गिनें।

4). दैनिक जीवन में इनमें से किन आकृतिओं को आप अपने आस-पास देख सकते हैं?

5). एक मजेदार खेल (Fun time) :- उपरोक्त आकृतिओं का उपयोग कर विभिन्न आकृतियाँ बनाएँ, उदाहरणार्थ यहाँ कुछ आकार दिए गए हैं।

(आकृति 2)

21 त्रिभुजों का समुच्चय

यह प्रारूप एक शैक्षणिक-साधन है जिसमें 25 प्रकार के त्रिभुज दिए गए है जिनके द्वारा त्रिभुजों की विविध तथा उनकी परस्पर संगतता, एकरूपता व समरूपता को सरलता पूर्वक समझाया जा सकता है।

सूचना :-

1). (i) यहाँ सभी प्रकार के त्रिभुज दिए गए हैं, जैसे समबाहु, समद्विबाहु, विषमबाहु, न्यून कोण, अधिक कोण व समकोण त्रिभुज।

(ii) इनमें से कई समरूप व कुछ सर्वांगसम त्रिभुज हैं।

2). कोणों व भुजाओं को मापने अथवा उनकी तुलना निम्नलिखित निर्देशों के अनुसार करें।

(i) भुजा के मापने या तुलना करने हेतु :-

एक ऐसी सीधी धार वाली पट्टी का उपयोग करें जिस पर कोई भी इकाई अंकित न हो।

(ii) कोणों को मापने अथवा तुलना हेतु :-

(a) कोणों की तुलना हेतु एक आयताकार कागज का प्रयोग करें जिसका एक कोना पूर्णतः समकोण है।

(b) कोण मापने हेतु एक कागज को प्रस्तुत कोण के अनुरूप मोड़ें।

गतिविधियाँ :-

1). कोणों के माप को ध्यान में रखते हुऐ वर्गीकरण करें ; समकोण, न्यून कोण अथवा अधिक कोण त्रिभुज।

2). भुजाओं की लम्बाई को ध्यान में रखते हुऐ वर्गीकरण करें ; समबाहु, विषमबाहु अथवा समद्विबाहु त्रिभुज।

3). एक त्रिभुज को एक हाथ में स्थिर रखें व दूसरे त्रिभुज को सभी संभव (कुल 6) विधियों द्वारा घुमाकर संगतता की जाँच की जा सकती है।

स्पष्टतः यहाँ सर्वांगसमता तथा समरूपता हेतु संगतता का महत्व आसानी से समझाया जा सकता है।

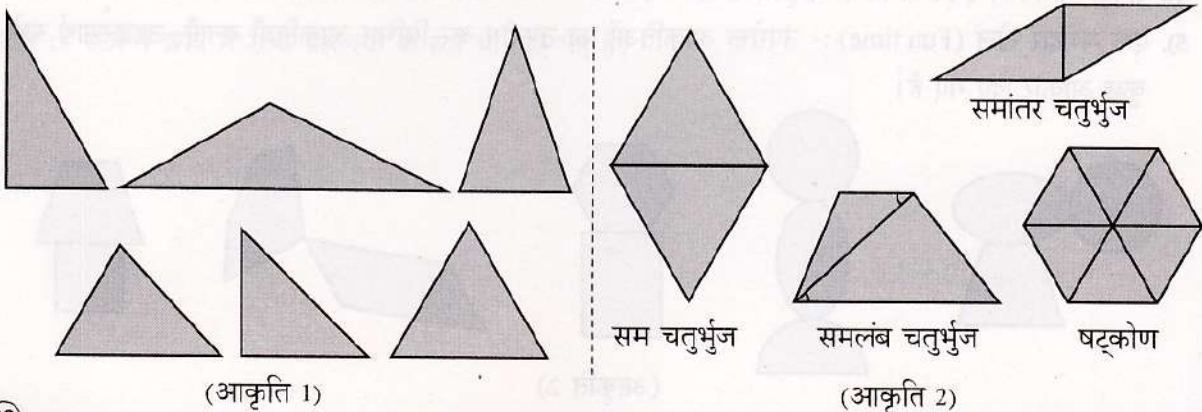
4). त्रिभुजों की समरूपता समझाने हेतु भी त्रिभुजों को एक दूसरे पर रख कर कोणों की तुलना करें।

कुछ मज़ेदार गतिविधियाँ :- एक साथ दो या दो से अधिक त्रिभुजों का उपयोग कर निम्नांकित बहुभुज बनाए जा सकते हैं। इनका अवलोकन करने पर इनके कई गुणों को देखा जा सकता है।

(i). समबाहु चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर अभिलम्बवत होते हैं।

(ii). समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजक होते हैं।

(iii). नियमित षट्कोण के प्रत्येक अंतः कोण का माप 120° होता है।

(आकृति 1) (आकृति 2)

त्रिभुज के अंतः कोणों का योग

यह प्रारूप एक शैक्षणिक-साधन है, जिसके द्वारा इस तथ्य का सत्यापन होता है कि किसी भी त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° होता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

तीन चतुर्भुजीय टुकड़े

सूचना :-

1). यह तीनों चतुर्भुजीय टुकड़े मिलकर एक बड़ा त्रिभुज बनाते हैं।

2). वस्तुतः इसी बड़े त्रिभुज का विच्छेदन करके ही इन चतुर्भुजों की रचना हुई हैं।

अब,

1). सर्व प्रथम इन तीनों टुकड़ों को इस तरह रखे कि एक त्रिभुज बने।

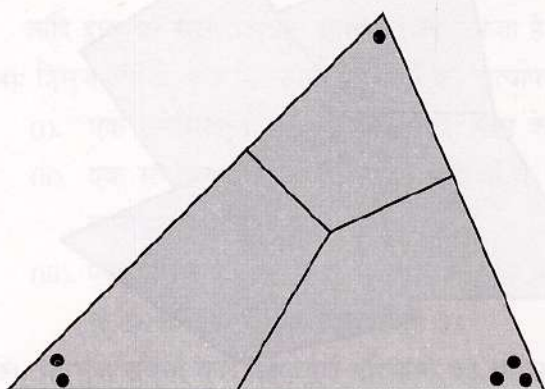
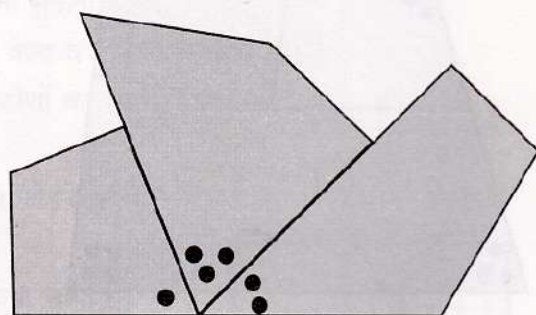
2). ध्यान से देखें तीनों कोणों को क्रमशः तीन तरह के बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित किया गया हैं। (आकृति 1)

3). शीर्ष बिन्दुओं को एक साथ एक बिन्दु पर रखें। (आकृति 2)

4). क्या यहाँ इस तथ्य का सत्यापन होता हैं, कि तीनों शीर्ष बिन्दुओं के कोणों का योग 180° (सरल कोण) है?

(आकृति 1)

(आकृति 2)

23 चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग

एक चतुर्भुज के सभी अंतः कोणों का योग 360° है इस तथ्य का सत्यापन करने हेतु इस प्रारूप का प्रयोग किया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- चार चतुर्भुजीय टुकड़े

सूचना :-

1). इन चारों टुकड़ों द्वारा एक बड़ा चतुर्भुज बनाया जा सकता है।

2). वस्तुतः इस बड़े चतुर्भुज का एक विशेष तरीके से विच्छेदन करने पर ही प्रस्तुत चार चतुर्भुज बनते हैं।

अब,

1). सर्वप्रथम चारों टुकड़ों को इस तरह रखें कि एक बड़ा चतुर्भुज बने। (आकृति 1)

2). ध्यान से देखें इस तरह चतुर्भुज के शीर्ष कोणों को विभिन्न बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

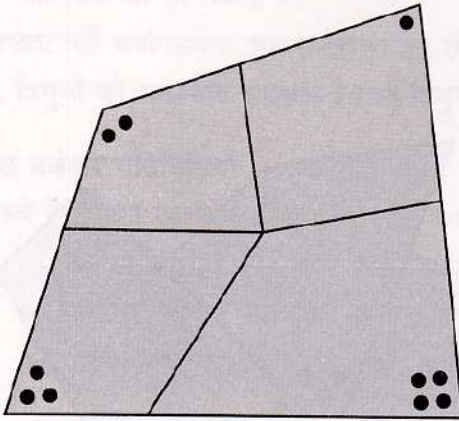
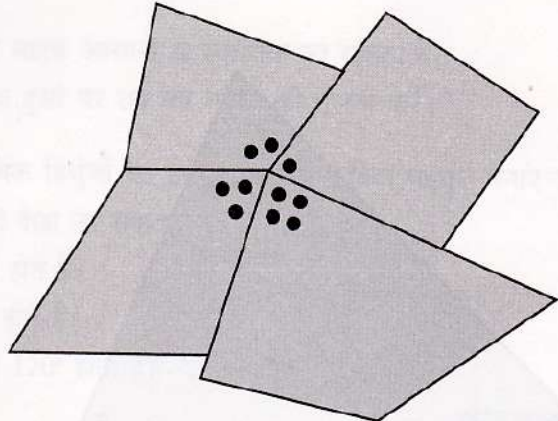
3). इन चारों शीर्ष बिन्दुओं को एक बिन्दु पर रखें। (आकृति 2)

4). क्या यह परिणाम किसी बहु परिचित तथ्य को दर्शाता है?

इस तरह सत्यापित होता है कि एक चतुर्भुज के चारों अंतः कोणों का योग 360° होता है।

(आकृति 1)

(आकृति 2)

आयताकार ज्यामितीय पटल

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा रेखाओं, कोणों व बहुभुजों के विभिन्न गुणधर्मों तथा उनके क्षेत्रफल व परिमाप संबंधी परिणामों का सत्यापन किया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- एक आयताकार पटल (board) जिस पर एक ग्राफ पेपर लगा हुआ हैं तथा उस पर अंकित क्षैतिज लम्बवत रेखाओं पर समान दूरी पर छोटी-छोटी कीलें (nails) लगी हैं।

अन्य आवयश्यक सामग्री :- कुछ रबर बैण्डस

सूचना :- 1). एक रबर बैण्ड का ज्यामितीय पटल पर निम्नानुसार प्रयोग कर मूलभूत ज्यामितीय संकल्पना को समझा जा सकता है।

(i). किन्हीं भी दो कीलों पर लगायें तो, एक रेखा खण्ड प्राप्त होगी।

(ii). किन्ही तीन असमरेख कीलों पर लगायें तो एक त्रिभुज की रचना होगी। (आकृति देखें)

2). प्रत्येक रेखाखण्ड की लम्बाई या कोण मापन (किसी भी इकाई के बिना) निम्नानुसार करेगें।

(i). लम्बाई - एक ऐसी सीधी धार वाली पट्टी के द्वारा जिस पर कोई भी इकाई अंकित न हो।

(ii). कोण - जिस कोण का मापन करना हो उसके अनुरूप कागज़ के टुकड़े को मोड़ा जा सकता है।

(iii). क्षेत्रफल - ग्राफ पेपर के उन वर्गों को गिनकर जो, रबरबैण्ड द्वारा बनी बंद आकृति के अन्दर है, बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।

अब, उपरोक्त विधि द्वारा, अग्रलिखित तथ्यों का सत्यापन किया जा सकता है।

1). एक आयत के क्षेत्रफल के सूत्र को जिसकी मान्यत एक पूर्व अवधारणा (Postulate) है, का सत्यापन है।

2). विभिन्न बहुभुजों के क्षेत्रफल के सूत्रों का सत्यापन।

3). समांतर रेखाओं पर एक तिर्यक् छेदी रेखा द्वारा बनाए गए कोणों जैसे संगत कोण, एकान्तर कोण, ऊर्ध्वाधर आदि द्वारा को सरलतापूर्वक समझाया जा सकता है।

4). त्रिभुज संबंधी कुछ महत्वपूर्ण परिणामों का सत्यापन किया जा सकता है जैसे :

(i). एक समद्विबाहु त्रिभुज में लम्ब केन्द्र, मध्य केन्द्र, अंतः केन्द्र व परिकेन्द्र समरेख होते हैं।

(ii). एक समद्विबाहु त्रिभुज में, समान भुजाओं के मध्य के कोणों का समद्विभाजक, तीसरे भुजा का लम्बद्विभाजक होता है।

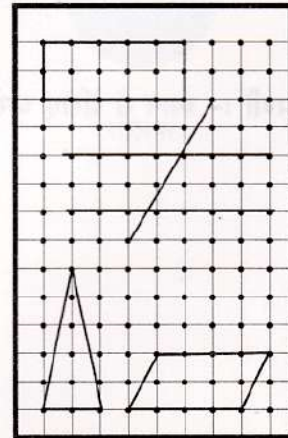
(iii). एक त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर व उसकी लम्बाई का आधा होता है।

5). चतुर्भुज संबंधी कुछ महत्वपूर्ण परिणामों का भी सत्यापन किया जाता है।

(i). समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजक होते हैं (और इसका प्रतिप्रमेय भी)।

(ii). समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत होते हैं (और इसका प्रतिप्रमेय भी)।

(ii). आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं।

(आकृति)

25 पायथोगोरस प्रमेय

यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसके द्वारा पायथोगोरस प्रमेय का सत्यापन किया जाता है।

प्रमेय :- प्रत्येक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक ट्रे जिसके मध्य में एक समकोण त्रिभुज है, जिसका प्रत्येक भुजा के साथ उसकी लम्बाई के अनुरूप एक वर्गाकार क्षेत्र है।

2). चार सर्वांगसम चतुर्भुज

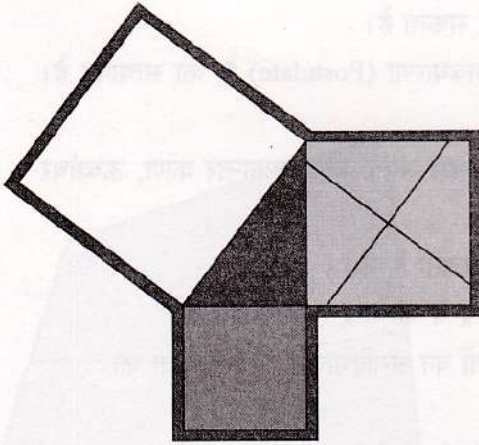
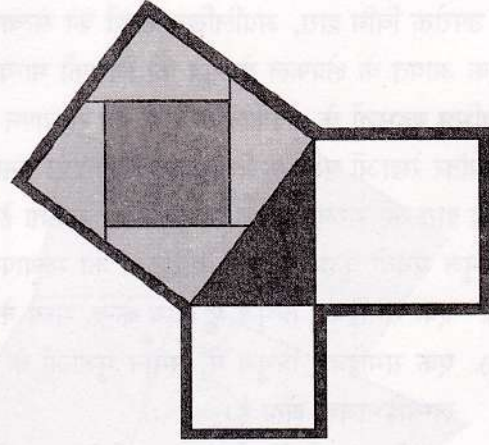
3). एक छोटा वर्ग

अब,

1). चारों चतुर्भुजों को त्रिभुज की एक भुजा से संलग्न वर्गाकार क्षेत्र में इस तरह रखें कि एक पूर्ण वर्गाकार आकृति बने तथा छोटे वर्ग को छोटी भुजा से संलग्न क्षेत्र में रखें। (आकृति 1)

2). अब इन पाँचों टुकड़ों को कर्ण से संलग्न वर्गाकार क्षेत्र में इस प्रकार रखें कि एक पूर्ण वर्गाकार आकृति बने। (आकृति 2)

3). चरण 1 व 2 की तुलना करें।

इस तरह पायथोगोरस प्रमेय सत्यापित होता है।

(आकृति 1) (आकृति 2)

टिप्पणी :- ध्यान से देखिए चारों चतुर्भुज, प्रस्तुत वर्ग का एक विशेष तरीके से विच्छेदन करने पर प्राप्त होते हैं।

घनाकार

इस शैक्षणिक-साधन द्वारा मूलभूत ज्यामितीय घनाकारों का परिचय सरलता पूर्वक से दिया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक घन	4). एक पिरामिड
2). एक घनाभ	5). एक बेलनाकार
3). एक शंकु	6). एक गोलक

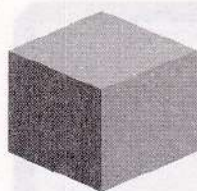
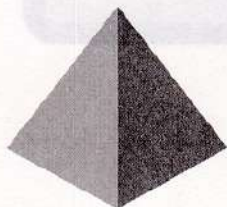
गतिविधियाँ :-

1). मूलभूत घनाकारों की पहचान।

2). शीर्षबिन्दु, सतह, धार, समतल आदि पदावलियों का परिचय।

3). धनाकारों का वर्गीकरण।

4). आस-पास के परिवेश में व्यक्त घनाकारों की पहचान।

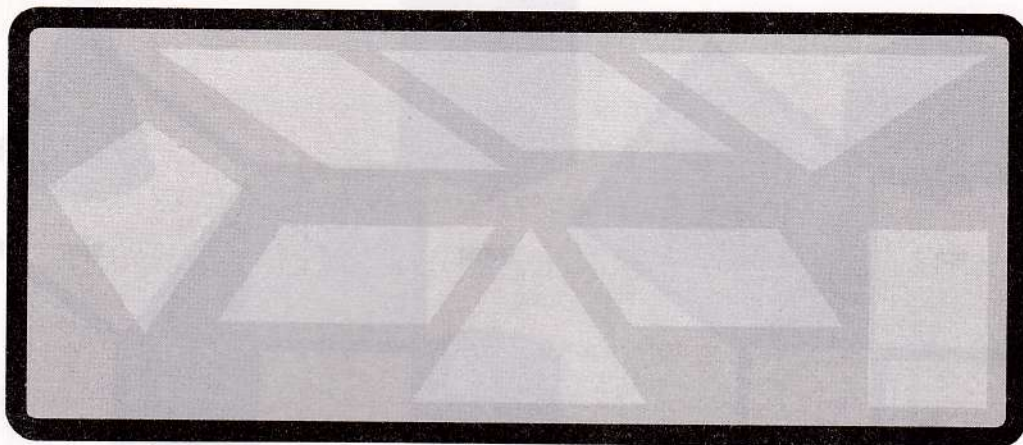
(आकृति)

दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज

यह प्रारूप, एक ऐसी ज्यामितीय पहेली है, जिसे समझने के लिए ज्यामितीय आकृतियों का सामान्य ज्ञान ही पर्याप्त है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज

2). एक ट्रे जिसमें 8 विविध बहुभुजों के खण्ड (grooves) हैं।

पहेली :- प्रस्तुत दोनों समकोण त्रिभुजों की ट्रे के विभिन्न खण्डों में इस तरह रखना है कि न तो वे एक दूसरे को ढकें और न ही उनके बीच रिक्त स्थान हो। (No over lapping & no gap)

(आकृति)

यह एक प्राचीन पहेली है। ऐसा माना जाता है कि इसका प्रादुर्भाव चीन में हुआ था। परन्तु इसकी लोकप्रियता सम्पूर्ण विश्व में है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). दो अलग अलग माप के सर्वांगसम समकोण त्रिभुज की दो जोड़ियाँ (कुल 4) तथा एक अलग समकोण त्रिभुज

2). एक वर्ग

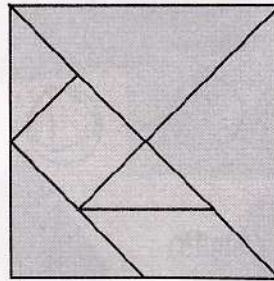
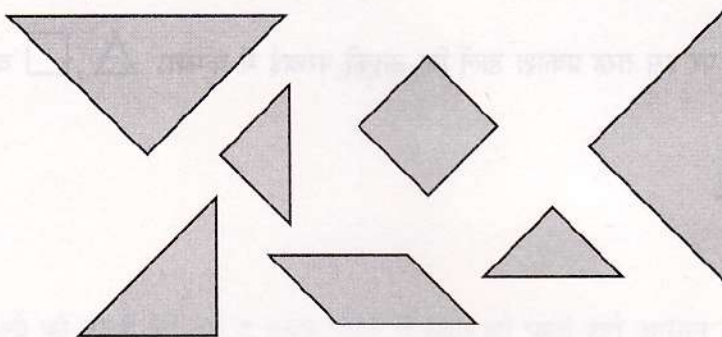
3). एक समांतर चतुर्भुज ; इस तरह विभिन्न आकृति वाले 7 टुकड़े

सूचना :-

1). सभी 7 टुकड़े मिलकर एक बड़ी वर्गाकार आकृति बनाती है।

2). वस्तुतः इसी बड़े वर्ग का एक खास तरीके से विच्छेदन करके ही ये 7 बहुभुज प्राप्त होते है।

पहेली :-

एक बार में ही सभी सात आकृतियों को एक साथ उपयोग कर विभिन्न आकृतियाँ बनाईए (प्रपत्र संलग्न)

(आकृति 1)

(आकृति 2)

हल :-

यदि कई बार प्रयत्न करने के बावजूद भी कोई आकृति न बने तब ही प्रपत्र में दिए गए हलों को देखिए।

विवेचना :-

ज्यामितीय सूझबूझ द्वारा इन सात बहुभुजों से लगभग 1600 आकृतियाँ बनाई जा सकती हैं।

29 तीन छिद्र एक ठेसी (Plug in three holes)

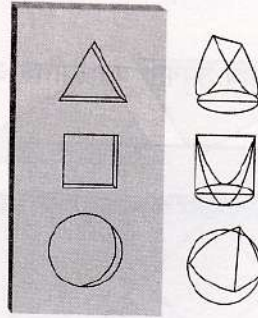
यह प्रारूप एक ऐसा शैक्षणिक-साधन है जिसकी मदद से प्रक्षेपण ज्यामिति (Projection geometry) की मूलभूत संकल्पना को समझाया जा सकता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). एक पटल जिसमें क्रमशः त्रिभुजाकार, वर्गाकार, तथा वृत्ताकार तीन छिद्र (holes) हैं

2). एक ठेसी (Plug)

पहेली :-

प्रस्तुत ठेसी (plug) को इस तरह तीनों द्वारों में से निकालें कि प्रत्येक बार प्रत्येक छिद्र के किनारे ठेसी (plug) के पूर्ण संपर्क में आयें।

(आकृति)

सूचना :-

एक टॉर्च से ठेसी (plug) पर इस तरह प्रकाश डालें कि उनकी परछाई में क्रमशः △, □ व ○ तीनों आकार मिलें।

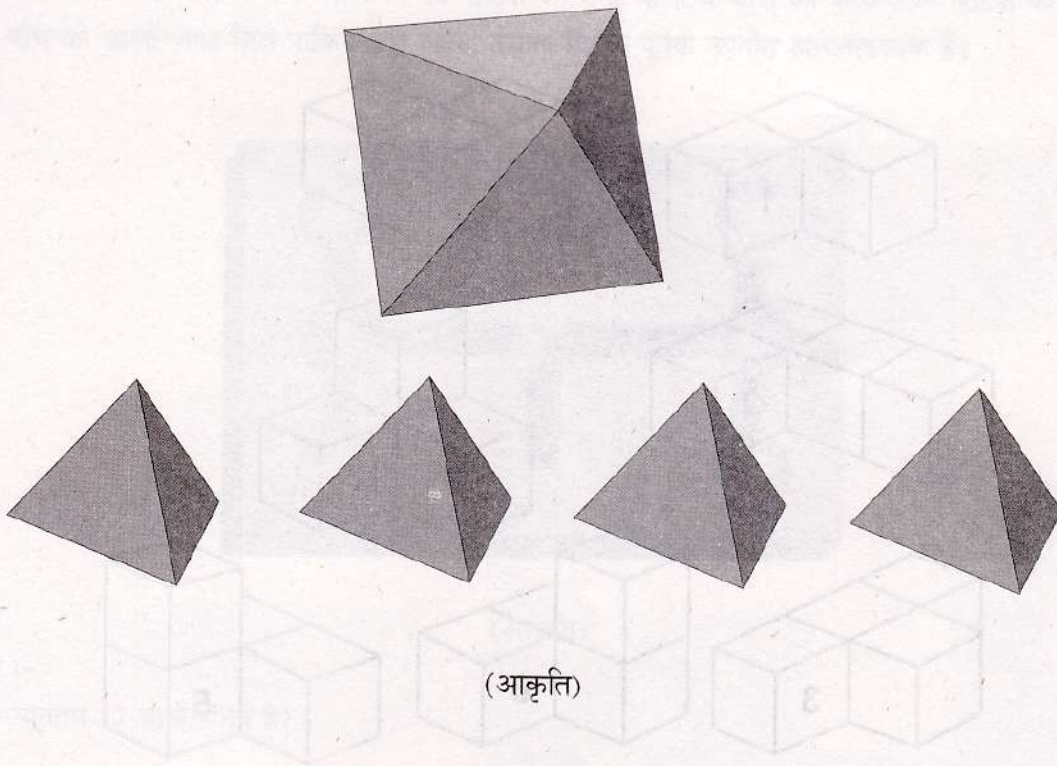
विशाल चतुष्फलक बनाईए

यह एक ऐसी पहेली है जिसमें एक नियमित अष्टफलक और चार ऐसे चतुष्फलक हैं जिनकी प्रत्येक फलक पर अलग रंग-संयोजन है।

पहेली :- प्रस्तुत पांच बहुफलकों को इस तरह स्थापित करना है कि एक बड़ा चतुष्फलक बने जिसकी,

1). प्रत्येक त्रिभुजीय फलक में एक ही रंग हो

2). अथवा प्रत्येक फलक पर चारों रंग हो।

(आकृति)

विवेचना :- इस पहेली को बच्चों की उम्र व समझ ध्यान में रखते हुऐ पहले शर्त आसान रखें जैसे एक फलक एक ही रंग की हो। तत्पश्चात दूसरे स्तर की शर्त रखें, जैसे प्रत्येक फलक पर चारों रंग आयें।

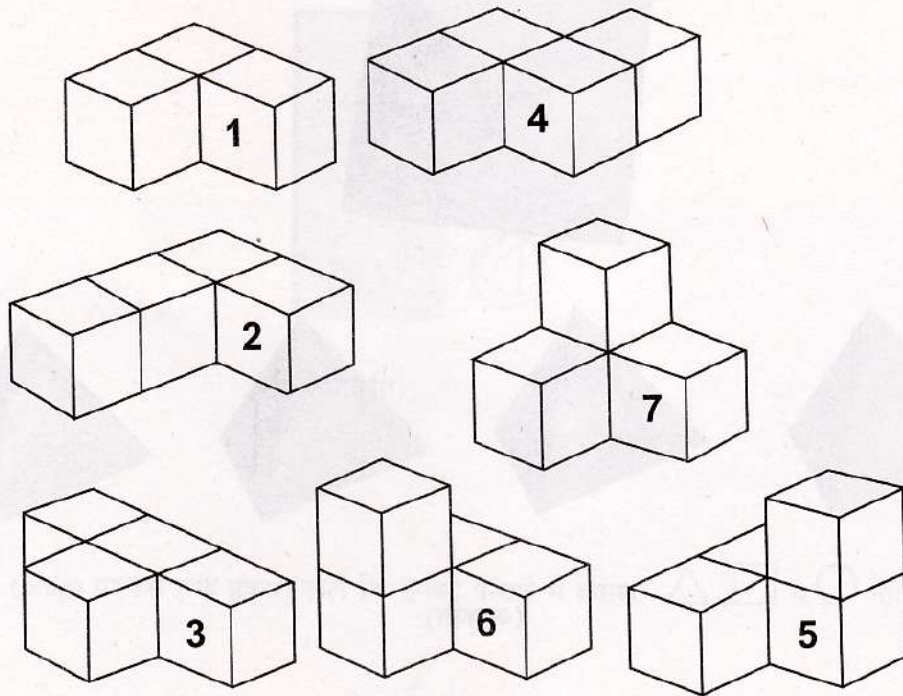
31 सोमा-घन

सोमा-घन पहेली अत्यन्त रूचिकर व रसप्रद पहेलियों में से एक है। इसकी रोचकता समय व काल से अप्रभावित है। 10 वर्ष से 100 वर्ष की उम्र तक के व्यक्तियों को यह आनंद व चुनौती प्रदान कर सकती है। इसकी खोज का श्रेय डेनिश गणितज्ञ पीट हेन (Piet Hein) को दिया जाता है।

यहाँ उपलब्ध हैं :-

27 घनाकार जिन्हें 7 विविध समूहों में रखा गया है।

पहेली :-

इन सातों समूहों को इस तरह रखें कि 3 x 3 x 3 का एक बड़ा घनाकार बने।

(आकृति)

विवेचना :-

इन सात समूहों का उपयोग करके विभिन्न आकर्षक आकारों की रचना संभव है। यहाँ एक प्रपत्र (booklet) संलग्न है, जिसमें कुछ संभव आकृतियाँ दी गई हैं।

पार्किंग पहेली

यह एक गणितीय पहेली है।

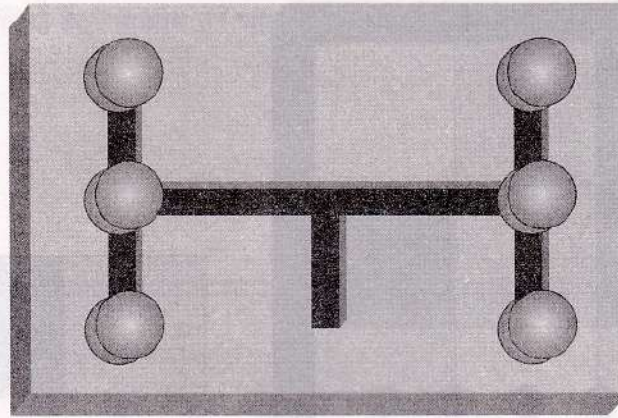
बोर्ड की रचना :-

1). प्रस्तुत बोर्ड में एक क्षैतिज खाँचे (Slot) के दोनों ओर एक-एक उर्ध्व खांचे दिए गए हैं, जिसमें तीन लाल और तीन पीले रंग की गोटियाँ दी गई हैं।

2). इन तीनों खांचो में गोटियाँ आसानी से घुम सकती हैं।

3). क्षैतिज खांचे के ठीक मध्य में एक छोटा उर्ध्व खांचा दिया गया है, जिसे पार्किंग स्थान कहा जाता है।

पहेली :-

न्यूनतम चालों (Moves) में तीनों लाल रंग की गोटियों की जगह पीली व पीली की जगह लाल गोटियों को पहुँचाना है। बीच की खाली जगह जिसे पार्किंग कहा जाता, उसका विवेक पूर्वक उपयोग अत्यंतावश्यक है।

(आकृति)

हल :-

यहाँ न्यूनतम 17 चालें संभव है।

विवेचना :-

इसी प्रकार 5- 5 गोटियाँ / 7- 7 गोटियाँ लेकर की पहेली बनायी जा सकता है जिनमें न्यूनतम चालें क्रमशः 49 / 89 चालें होंगी।

4 x 4 रंगीन वर्गों की पहेली

यह एक रसप्रद पहेली है।

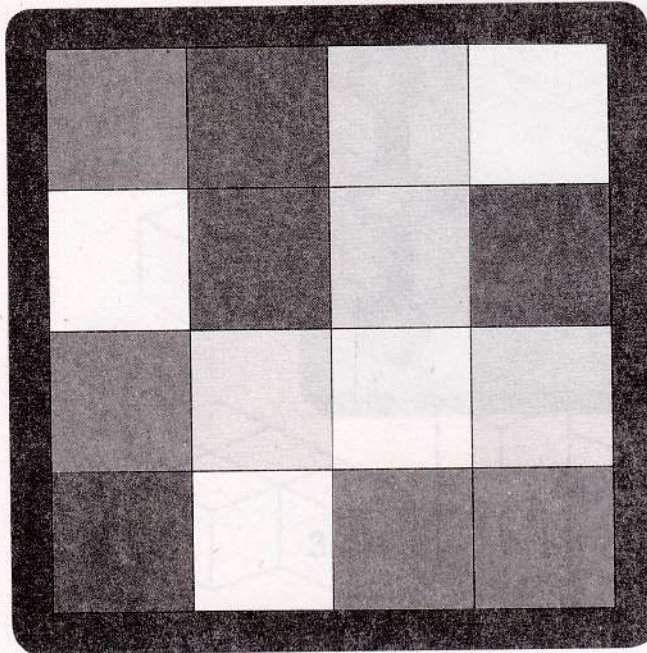
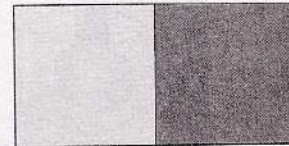
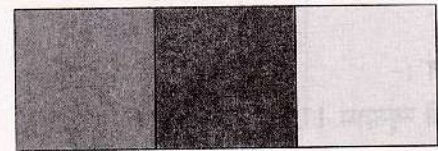
यहाँ उपलब्ध हैं :-

1). 5 द्विवर्ग (Domininoes)

2). 2 त्रिवर्ग (Trominos)

(द्विवर्ग एक 2 x 1 (आकृति 1) तथा त्रिवर्ग एक 3 x 1 (आकृति 2) आयताकार गोटियाँ हैं।)

पहेली :- इन सातों गोटियों को एक वर्गाकार ट्रे में इस तरह रखें कि प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ व विकर्ण में सभी रंग एक ही बार आए, पुनरावृत्ति न हो।

हल :- इस पहेली का हल अंतिम पृष्ट पर दिया गया है किंतु यथेष्ट प्रत्यन किए बिना हल न देखें।

(आकृति 1) (आकृति 2)

विवेचना :- उपरोक्त पहेली के हल की गणितीय व्याख्या भी संभव है।

पैग-बोर्ड पहेली

यह एक गणितीय पहेली है।

बोर्ड की रचना :-

1). इस बोर्ड पर 11 स्तंभ (Peg) हैं। एक तरफ 5 काली व दूसरी तरफ 5 सफेद गोटियाँ (Counters) हैं (आकृति देखें)

2). ठीक मध्य का स्तंभ खाली है।

पहेली :-

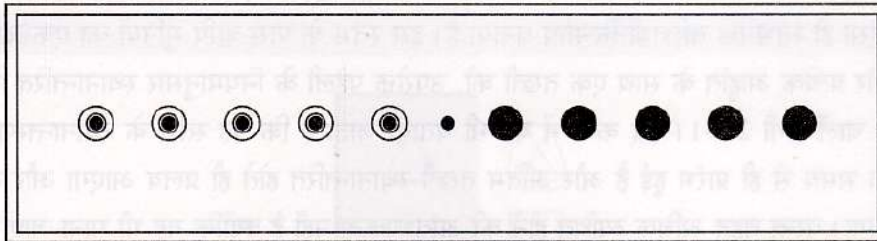
निम्नलिखित नियमों का पालन कर सफेद की जगह काली व काली की जगह सफेद गोटियों को पहुँचाना है।

1). एक गोटी को उसके पड़ोस वाले (next) खाली स्तंभ में स्थानान्तरित (shift) किया जा सकता है

2). अथवा एक गोटी को उसके पड़ोस की सिर्फ एक गोटी के उपर से कुदाकर (jump) बढ़ाया जा सकता है।

3). यह स्थानान्तरण न्यूनतम चालों में सम्पन्न होना चाहिए।

हल :-

यह स्थानान्तरण (5-5 गोटियों हेतु) न्यूनतम 35 चालों में संभव है।

(आकृति)

विवेचना :-

1). 5-5 गोटियाँ अथवा निश्चित संख्याओं के स्थान पर यदि हम क्रमशः m व n चल (variable) राशियों को ले तो न्यूनतम चालें होंगी,

$mn + m + n$

2). उपरोक्त सूत्र को प्रमाणित किया जा सकता है।

ब्रह्मा का स्तंभ

यह एक गणितीय पहेली है।

यहाँ उपलब्ध हैं :- 1). एक आधार पटल (base) जिसमें तीन स्तंभ (pins) हैं।
2). 5 गोलाकार तख्तियाँ (discs)

पहेली :-

प्रारंभ में किसी एक स्तंभ (pin) पर सभी 5 तख्तियों को इस तरह रखते हैं कि वे घटते क्रम में हों अर्थात सबसे बड़ी तख्ती सबसे नीचे व सबसे छोटी सबसे उपर हो। अब चुनौती यह है कि इन सभी तख्तियों को इसी क्रम में किन्तु किसी दूसरे स्तंभ पर न्यूनतम चालों में स्थानान्तरित कैसे करें?

स्थानान्तरण हेतु नियम :- 1). एक चाल में एक और केवल एक तख्ती ही उठायी जा सकती है।
2). बड़ी तख्ती कभी भी छोटी के उपर नहीं आ सकती।

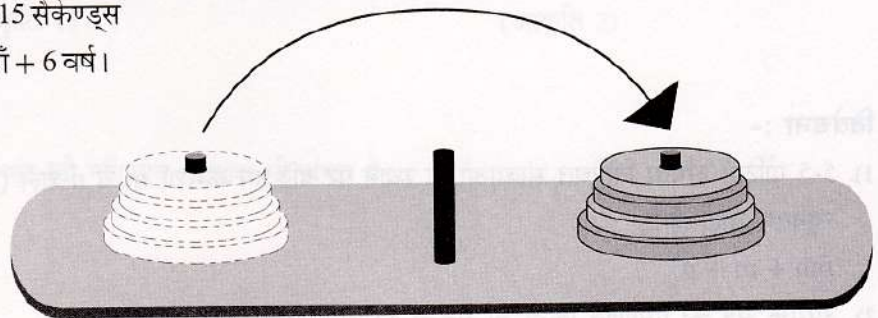
संकेत (Hint):- न्यूनतम चालों की गणना हेतु प्रारम्भ एक तख्ती से करें। तद्उपरांत क्रमशः 2, 3, 4, ... तख्तियों के लिए न्यूनतम वाँछित चालों हेतु गणना करें। इस तरह क्या एक अनुक्रम प्राप्त होता है? पहेली के परिणाम को देखने से पहले अनुक्रम समझने का प्रयास करें।

हल :- 1). n तख्तियों के लिए न्यूनतम वाँछित चालों हेतु सूत्र है, $2^n - 1$
2). इस परिणाम की सिद्धि गणितीय-अनुमान (Induction) द्वारा संभव है।

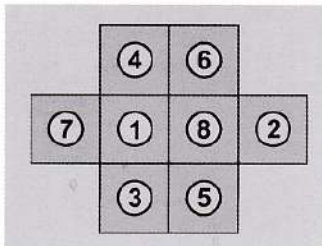
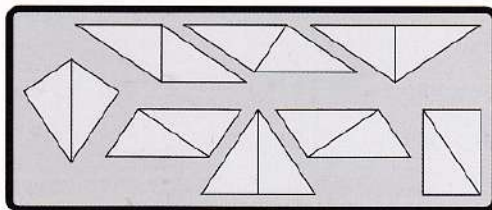
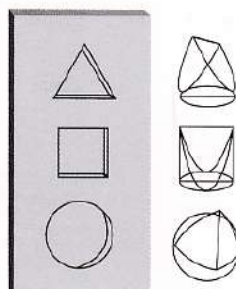
पुराण (Mythology):- इस पहेली के साथ रोचक पौराणिक कथा जुड़ी हुई है। ऐसा कहा जाता है कि सृष्टि के रचयिता ब्रह्मा जी ने एक ऐसा ही स्तंभ 64 तख्तियों के साथ बनाया है। इस स्तंभ के पास ऋषि मुनियों का एक बड़ा समूह एक यज्ञ कर रहा है और प्रत्येक आहुति के साथ एक तख्ती को, उपरोक्त पहेली के नियमानुसार स्थानान्तरित किया जा रहा है। अतः न्यूनतम चालें होगी $2^{64} - 1$। इस कथा में यह भी बताया जाता है कि यह स्तंभ के स्थानान्तरण की प्रक्रिया सृष्टि के रचना के समय से ही प्रारंभ हुई है और अंतिम तख्ती स्थानान्तरित होते ही प्रलय आएगा और सम्पूर्ण पृथ्वी का विलय हो जाएगा। परन्तु बहुत अधिक व्यथित होने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यह भी माना जाए कि अनवरत रूप से, तख्तियों को हटाने की दर यदि 1 तख्ती प्रति सैकेण्ड है तो भी यह प्रक्रिया पूरी होने में लगने वाला समय होगा $2^{64} - 1$ सैकेण्ड्स।

और $2^{64} - 1$ सैकेण्ड्स का अर्थ

18, 446, 744, 073, 709, 615 सैकेण्ड्स

= 58, 454, 204, 609 सदियाँ + 6 वर्ष।

(आकृति)

पहेलियों के हल

9 अंक पहेली (1 से 8)

27 दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज

29 तीन-छिद्र एक ठेसी

33 4 x 4 वर्ग पहेली

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1 पीला

2 आसमानी नीला

3 हरा

4 लाल

विक्रम ए. साराभाई कम्यूनिटी साइंस सेन्टर (VASCSC)

विज्ञान शिक्षण के क्षेत्र में अग्रणीय संस्थान VASCSC की नींव 1966 में स्वयं डॉ. विक्रम साराभाई नें रखी थी। VASCSC की शुरूआत एक ऐसे मंच के रूप में हुई जहाँ विज्ञान शिक्षण से संबंधित व्यक्ति साथ आकर विज्ञान एवं गणित शिक्षण से जुड़े नए विचारों और पद्धतियों को परख पाएँ। इस संस्थान का उद्देश्य विद्यार्थियों, शिक्षकों एवं समाज में विज्ञान के सिद्धांत तथा वैज्ञानिक पद्धति के प्रति रूचि उत्पन्न करना, प्रोत्साहित करना तथा इनके प्रति जागरूक करना है। साथ ही साथ विज्ञान शिक्षण से जुड़े क्षेत्रों में सुधार और नवप्रवर्तन लाना है, जिससे सीखने-सिखाने की प्रक्रिया इतनी रोचक व सुगम हो जाए कि विज्ञान के गहन सिद्धांतों को भी सहज ही आत्मसात किया जा सके। VASCSC में जीवविज्ञान, रसायन-विज्ञान, भौतिक-विज्ञान, कंप्यूटर, गणित एवं इलेक्ट्रॉनिक्स की सुसज्जित प्रयोगशालाएँ तथा कार्यशाला, पुस्तकालय एवं साइंस प्लेग्राउन्ड जैसी सुविधाएँ उपलब्ध हैं। विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के क्षेत्र में रूचि रखनेवाले हर व्यक्ति के लिए यह संस्थान कार्यरत् है।

www.vascsc.org

नवरंगपुरा अहमदाबाद 380 009
दूरभाष : +91-79-26302085, 26302914
ई-मेल : info@vascsc.org

ISBN: 978-93-80580-18-0